

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 27 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740015

研究課題名(和文) 標準の高さと代数・数論力学系の周辺

研究課題名(英文) Canonical heights and algebraic/arithmetical dynamics

研究代表者

川口 周 (Kawaguchi, Shu)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20324600

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：高さとは、代数体上の代数多様体の点や部分代数多様体の算術的な「大きさ、複雑さ」を測る量と考えられる。代数多様体が支配的な自己有理写像を持つときには、写像の反復合成に関する次数の増大度を測る力学系次数という基本的な量がある。当該研究では、ブラウン大学のシルバーマン氏との共同研究で、有理点の写像の反復合成に関する高さの増大度(有理点の算術的度数)と、力学系次数との関係を調べた。また、アーベル多様体のときに、有理点の算術的度数と力学系次数の関係を詳しく調べた。

研究成果の概要(英文)：Heights are considered to measure arithmetic "bigness" or "complexity" of points and subvarieties of algebraic varieties defined over number fields. For a dominant rational self-map of an algebraic variety, there is a basic notion called the "dynamical degree" of the map, which measures the degree growth rate under the iteration of the self-map. With joint works with J. H. Silverman, we have studied relationship between the dynamical degree and the "arithmetic degree" of a rational point, which measures the height growth rate of a rational point under the iteration of the self-map. For abelian varieties, we have studied this relationship in more detail.

研究分野：代数幾何学

キーワード：標準の高さ Arakelov 幾何

1 . 研究開始当初の背景

高さとは、代数体上に定義された代数多様体の点(より一般には部分代数多様体)の算術的な「大きさ、複雑さ」を測る量と考えられる。代数多様体が良い自己写像を持つときには、その写像に関して良く振る舞う高さが存在することがある。このような高さを標準的高さという。最も有名で深く研究されている標準的高さは、代数体上に定義されたアーベル多様体の n 倍射に関してよく振る舞うもので、Neron-Tate の高さによばれている。その他に射影空間の射についても標準的高さが、Call--Silverman や Zhang によって構成され、その数論的性質が調べられている。さらに、著者により、アフィン平面のヘノン写像、非特異射影的曲面の正の位相的エントロピーを持つ自己同型写像、代数多様体が複数の良い射(偏極的によばれる)をもつ場合にも、標準的高さが構成され、その数論的性質が調べられている。

2 . 研究の目的

アーベル多様体の n 倍射や、射影空間の射に関する標準の高さと同じように、代数体上に定義された代数多様体とその自己写像に関して、標準的高さ関数が構成できるかを調べる。また、一般に、代数多様体の支配的な有理写像についても、写像の反復合成に関する次数の増大度を測る力学的次数という基本的な量がある。標準的高さ関数が構成できるか分からないような、一般の代数多様体の(有理)写像についても、写像の反復合成に関する有理点の振る舞いなど、代数的・数論的性質を調べたい。

3 . 研究の方法

高さとは、代数体上に定義された代数多様体の点(より一般には部分代数多様体)の算術高

さは、もともとディオファントス幾何の有用な道具である。アラケロフ幾何を用いると、高さを代数幾何的に構成することができる。当該研究では、代数幾何学だけでなく、数論の手法や、複素力学系の手法も用いて、代数多様体の自己写像に関する高さ関数や、代数的・数論的な性質を調べる。

4 . 研究成果

(1) 発表論文の(4)で、アフィン空間の正則な多項式自己同型について、大域のおよび局所的な標準の高さを構成し、その数論的性質を調べた。著者は、以前にアフィン平面の場合に、大域的な標準の高さを構成したが(Canonical height functions for affine plane polynomial automorphisms , Mathematische Annalen 335 (2006) , no. 2 , 285--310) , この論文では、高次元化と、大域的標準の高さの局所の高さへの分解を与えた。

(2) Baragar により、ピカール数が2の $K3$ 曲面では、標準的ベクトル高さが構成されることが示されていた。ピカール数が3以上の $K3$ 曲面では、一般には標準的ベクトル高さは存在しないと予想されていたが(数値計算により)、厳密な証明はなかった。発表論文の(6)では、ピカール数が3以上の $K3$ 曲面では、標準的ベクトル高さが存在しないものを数学的に厳密に与えた。

(3) 写像の反復合成に関する次数の増大度を測る力学的次数は基本的な量である。これらは、複素数体上の代数多様体で深く研究されている。発表論文の(2)(5)では、アフィン空間の多項式同型の観点から、 \mathbb{Q} -代数上で定義されたアフィン三角同型射について、力学的次数がどう振る舞うかを調べた。証明の

一部では，グラスマン多様体のシューベルト計算を用いた．

(4) ブラウン大学のシルバーマン氏と，力学的次数と，有理点の高さの増大度を測る量である算術的度数について調べ，算術的度数が力学的次数を超えないという結果を得た．また，アーベル多様体などについて，両者の関係を調べた．発表論文の(3)はその結果の一部である．

(5) 京都大学の山木彦彦氏と，非アルキメデス幾何の観点から，距離グラフの代数的ランクと組み合わせ的ランクの関係を調べた．超楕円的な場合と種数が3のときに，DVR上の準安定曲線で，生成ファイバーから特殊ファイバーの双対グラフへの特殊写像に関して，階数が上手く保たれるようなものがあることが分かった．

5. 主な発表論文等
(研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

1 Michael Joyce, Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, Landen transforms as families of (commuting) rational self-maps of projective space, the Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series) 9 (2014), no. 4, 547--584. 査読有

<http://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin/>

2 Shu Kawaguchi, Nilpotency indices, degrees of iterations of affine triangular automorphisms, and Schubert calculus, Manuscripta Mathematica 144 (2014), no. 3, 311--339. 査読有
DOI: 10.1007/s00229-014-0658-x

3 Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, Examples of dynamical degree equals arithmetic degree, Michigan Mathematical Journal 63 (2014), no. 1,

41--63. 査読有
DOI: 10.1307/mmj/1395234358

4 Shu Kawaguchi, Local and global canonical height functions for affine space regular polynomial automorphisms, Algebra & Number Theory 7 (2013), no. 5, 1225--1252. 査読有
DOI: 10.2140/ant.2013.7.1225

5 Shu Kawaguchi, Inverse degree of an affine space triangular automorphism, Proceedings of the American Mathematical Society 141 (2013), no. 10, 3353--3360. 査読有
DOI: 10.1090/S0002-9939-2013-11631-X

6 Shu Kawaguchi, Canonical vector heights on K3 surfaces -- a nonexistence result, Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni 24 (2013), no. 2, 181--197. 査読有
DOI: 10.4171/RLM/651

[学会発表](計12件)

1 Shu Kawaguchi, Canonical vector heights on K3 surfaces, Symmetries of Kahler manifolds, dynamics and moduli spaces, SISSA, Trieste (Italy), 2014年9月26日

2 川口周, 代数・数論力学系について, 第59回代数学シンポジウム, 東京大学大学院数理科学研究科, 2014年9月9日

3 Shu Kawaguchi, Rank of divisors on curves and graphs under specialization (with Kazuhiko Yamaki), Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, 国民休暇村 気仙沼大島, 2014年9月3日

4 Shu Kawaguchi, Rank of divisors on hyperelliptic curves and graphs
Specialization of Linear Series for Algebraic and Tropical Curves
Banff International Research Station (Canada), 2014年4月3日

5 Shu Kawaguchi, Arithmetic degrees and dynamical degrees for morphisms, and nef canonical heights on abelian varieties, モジュライ空間と自己写像, 京都大学数理解析研究所, 2014年3月6日

6 Shu Kawaguchi, Arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties and canonical heights for nef divisors on abelian varieties, 代数幾何学城崎シンポジウム, 城崎大会議館, 2013年10月23日

7 Shu Kawaguchi , Arithmetic degrees of morphisms of algebraic varieties and canonical heights for nef divisors on abelian varieties , Paris-Kyoto-Barcelona seminar (on Arakeov geometry) , Institut de Mathematiques de de Jussieu , France , 2013 年 9 月 27 日

8 Shu Kawaguchi , Dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties , Conference on Diophantine Problems and Arithmetic Dynamics , Institute of Mathematics , Academia Scinica , Taiwan , 2013 年 6 月 25 日

9 川口 周 , Dynamical and Arithmetic Degrees of Rational Maps , 複素力学系の新展開 , 京都大学数理解析研究所 , 2012 年 12 月 13 日

10 Shu Kawaguchi , Degrees of iterations of triangular automorphisms over \mathbb{Q} -algebras , Doctoral Forum of Mathematics between Fudan and Kyoto Universities , Kyoto University , 2012 年 12 月 8 日

11 Shu Kawaguchi , Dynamical and arithmetic degrees of rational maps , NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory , NCTS , National Tsing-Hua University , Taiwan , 2012 年 8 月 31 日

12 Shu Kawaguchi , Degrees of iterations of triangular automorphisms over \mathbb{Q} -algebras , Algebraic dynamics , University of California Berkley , US , 2012 年 5 月 6 日

6 . 研究組織

(1)研究代表者

川口 周 (Kawaguchi Shu)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 20324600