

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740018

研究課題名(和文)ゼータ正規化積とそれが定める特殊関数の相補的研究

研究課題名(英文)A complementary study of zeta regularized products and the associated special functions

研究代表者

山崎 義徳 (Yamasaki, Yoshinori)

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：00533035

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：ゼータ正規化積およびそれに付随して現れる特殊関数について、代数的・解析的研究を行った。例えば、ゼータ正規化積の拡張である“深さ r のゼータ正規化積”を導入し、然るべき多様体上のラプラシアン固有値に対してそれを計算した。また、ゼータ正規化積の有限類似(グラフ類似)である Ihara ゼータ関数に関連して、Ramanujan グラフの研究も行った。具体的には、完全グラフから辺を間引いてどこまで Ramanujan グラフであり続けるかという問題を考え、巡回群などに対する Cayley グラフの場合に、その境界の決定が解析数論的な問題と関連することを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We study zeta regularized products and the associated special functions, especially their algebraic and analytic properties. For example, we explicitly calculate "higher depth regularized products", which are generalizations of the usual regularized products, of the eigenvalues of the Laplacian on some manifolds. Moreover, we also investigate Ramanujan graphs in association with Ihara zeta functions, which are graph analogues of the zeta regularized products. Since Ramanujan graphs have very strong connectivity properties, it is easily expected that the graph remains to be Ramanujan even if one removes some edges from the complete graph. We can then clarify that the determination of the number of such removable edges are related to some problems on analytic number theory such as the conjecture of Hardy-Littlewood and Bateman-Horn.

研究分野：解析数論

キーワード：ゼータ関数 ゼータ正規化積

1. 研究開始当初の背景

ゼータ正規化積とは、ゼータ関数の 0 での微分を用いて定義される解析的な量であり、数列の無限積の発散を正規化するために導入された重要な数学的对象である。それは、例えば幾何学における解析的捩率(ラプラシアン行列式)の理論や、数理物理における超弦理論との関連など、現在数学の様々な分野に現れている。ゼータ正規化積の研究は、特殊関数論的な側面も持つ。例えば、ガンマ関数、Dedekind エータ関数は、それぞれ Hurwitz ゼータ関数、実解析的 Eisenstein 級数 (Epstein ゼータ関数) の 0 での微分として実現される(これらはそれぞれ Lerch の公式、Kronecker の第一極限公式と呼ばれている)。一般に、関数の正規化積表示が得られるとその関数の零点や極の情報が見られるが、ここで注目したいのは、これら正規化積として実現される関数の変換則(保型性)が、正規化積の積構造から説明できるという事実である。実際 Wakayama によって、Dedekind エータ関数の保型性が、対応するゼータ関数の偏角のずれから来るものであるという解釈が得られており、これはこの種の特殊関数の性質が、正規化積の複素関数論的性質から説明できることを示唆するものである。しかし、この事実はいくつかの具体例で確認されているに過ぎず、一般論の構成はまだできていないのが現状である。

2. 研究の目的

これを踏まえ本研究では、上記現象を正規化積の一般論として整備・構築することを目標とする。そのために、まずは正規化積自身の複素関数論的理論の再整備を行う。一般論がある程度確立したら、今度は正規化積表示を持つ、またはそれで定義される、あるいはそれらの一般化として記述される特殊関数について、それらが満たす代数的・解析的性質を調べ、特にそれらの積構造から来るような変換則について研究する。以上のように、正規化積と付随して現れる特殊関数との両者を適宜取り換えながら、相互的・相補的な研究を行うことを目的とする。

3. 研究の方法

上記実現のため、以下の研究を行う。

(1) ゼータ正規化積の複素関数論的理論の再整備と展開:

これは今後のゼータ正規化積の発展的研究を見据えた準備・補助的な研究である。これまでのゼータ正規化積の研究には、簡略化のため実数に制限して議論されてきたものが少なからず存在する(例えばアノマリーの問題; 与えられた二つの数列の「積の正規化積」と「正規化積の積」の「ずれ」の記述、など)。そこで本研究では、理論の強固のためそれらを複素数の範囲で再議論し、結果の拡張を試みる。

(2) ゼータ正規化積およびその一般化で記

述される特殊関数の研究:

ゼータ正規化積自身を拡張し、より一般的な状況下で正規化積を研究する。報告者は、正規化積の定義において 0 での微分を $1-r$ (r は自然数) での微分に取り換えた「深さ r のゼータ正規化積」を導入し、それに付随して現れる特殊関数について研究した。例えば負定曲率のコンパクトリーマン面に対するラプラシアンの「深さ r の行列式」が、「Milnor-Selberg ゼータ関数」と呼ぶべき新しい関数 (Selberg ゼータ関数の一般化) で書けることを示し、さらにそれがオイラー積表示を持ち、然るべき領域に解析接続され、そこで関数等式を満たすことを証明した(以上は東京工業大学の黒川信重氏および九州大学の若山正人氏との共同研究である)。これは、「深さ r のゼータ正規化積」に付随して現れる特殊関数が十分興味深いものになりうることを示唆するものである。さらに、「ゼータ関数の全ての整数点には代数的・幾何学的な情報が内在するであろう」という数論における一つの指導原理に従えば、この「深さ r の正規化積」にも、 $r=1$ の場合同様幾何学的(不変)量の潜在が十分期待できる。そこで、この「深さ r のゼータ正規化積」について、これまでの研究の継続・発展研究を行う。

(3) ゼータ正規化積の有限類似、特に Ramanujan グラフの研究:

ゼータ正規化積の有限類似である Ihara ゼータ関数(グラフのゼータ関数)を研究し、それを通常のゼータ正規化積の研究に還元する。この手法は従来の研究にはない、ゼータ正規化積の新しい視点を与えうるものとして期待できる。対応する Ihara ゼータ関数が Riemann 予想を満たすグラフを Ramanujan グラフという。Ramanujan グラフはある意味で「最良の」グラフであり、代数、数論、幾何などの純粋数学からだけでなく、ネットワークとの関連から応用数学の観点からも重要な研究対象である。本研究では、まず Ramanujan グラフの存在・構成問題について議論し、それから順次対応する Ihara ゼータ関数の代数的・解析的・組合せ論的性質の研究へと移行する。

4. 研究成果

(1) について:

報告者は、これまでの研究で数列が保型 L 関数の零点で与えられる場合にゼータ正規化積を具体的に計算している。この一般化として、上記公式を Selberg 族と呼ばれる族に属する L 関数へ拡張することを試みた。そのためには対応する明示公式が必要となるが、その際 Smajlovic (2010) によって得られた明示公式が使えることを確認した。計算が煩雑で最終的な表示にはまだ到達していないが、それは今後の課題とする。Selberg 族は現在知られている多くの数論的 L 関数を含んでいるので、本研究は完成すれば今後の

ゼータ正規化積の研究においても重要な位置づけになると考えられる。

(2) について:

上記の負定曲率のコンパクトリーマン面に対するラプラシアン of “深さ r の行列式” に関する結果を論文にして出版することができた。また、並行して高次元球面の場合にも対応する結果を得ていたが、そこでは指数関数部分が明らかになっていなかった。本研究ではその部分に対する解析を進めることができ、それが Meixner-Pollaczek 多項式と呼ばれる直交多項式で記述できることを明らかにした。以上の結果については現在論文執筆中である。

(3) について:

Ramanujan グラフは、連結度が非常に高いグラフである。それを踏まえ、「完全グラフから正則性を保ちつつ辺を間引いていった場合どこまで Ramanujan グラフであり続けるか」という問題を考察し、グラフが然るべき群の Cayley グラフとして与えられる場合にその境界を決定した。まずは最も基本的な巡回群の場合にこの問題を考察し、その境界の記述には Hardy-Littlewood 予想、あるいはその一般化である Bateman-Horn 予想と呼ばれる解析数論の重要な問題が関係することを明らかにした。次に非可換だが比較的構造が単純な Frobenius 群の場合を考え、その特別な場合である二面体群の場合に、巡回群の場合と同様の結果を得た。以上は愛媛大学の平野幹氏と堅田晃平氏との共同研究であり、現在論文投稿中である。なお、これらの結果のプレプリントは以下の通りである。

Miki Hirano, Kohei Katata, Yoshinori Yamasaki, Ramanujan Cayley graphs of Frobenius groups,

MathArXiv : arXiv:1503.04075

Miki Hirano, Kohei Katata, Yoshinori Yamasaki, Ramanujan circulant graphs and the conjecture of Hardy-Littlewood and Bateman-Horn,

MathArXiv : arXiv:1310.2130

また、Frobenius 群よりも少し構造が複雑だが表現論がよく知られている群である、有限体上の GL_2 型の群 (またはそれらの射影化) に対しても同様の問題を考えたが、最終的な結論はまだ得られていないので、それは今後の課題とする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Nobushige Kurokawa, Masato Wakayama, Yoshinori Yamasaki, Milnor-Selberg

zeta functions and zeta regularizations, Journal of Geometry and Physics, 64 (2013) No. 1, 120-145. (査読有)
doi: 10.1016/j.geomphys.2012.10.015.

[学会発表](計 12 件)

山崎 義徳, An explicit prime geodesic theorem for discrete tori via the hypergeometric functions, 香川セミナー, 香川大学 (香川県・高松市), 2014 年 12 月 13 日.

山崎 義徳, Ramanujan Cayley graphs on groups of GL types, Zeta Functions in OKINAWA 2014, 沖縄コンベンションセンター (沖縄県・宜野湾市), 2014 年 10 月 26 日.

山崎 義徳, 球面上の Laplacian の行列式と Meixner-Pollaczek 多項式, 表現論がつなぐ数学 2014, サンポートホール高松 (香川県・高松市), 2014 年 9 月 29 日.

山崎 義徳, Spectral zeta functions for discrete tori and the hypergeometric functions, Geometric zeta functions and related topics, 佐賀大学 (佐賀県・佐賀市), 2013 年 10 月 30 日.

山崎 義徳, Ramanujan Cayley graphs on Frobenius groups, Zeta Functions in OKINAWA 2013, 沖縄コンベンションセンター (沖縄県・宜野湾市), 2013 年 10 月 21 日.

山崎 義徳, Ramanujan Cayley graph : 非可換群の場合の注意, 表現論がつなぐ数学, ひめぎんホール別館 (愛媛県・松山市), 2013 年 9 月 29 日.

山崎 義徳, Ramanujan circulant グラフについて, 山形大学離散数理セミナー, 山形大学 (山形県・山形市), 2013 年 7 月 9 日.

山崎 義徳, Ramanujan circulant グラフについて, 首都大整数論セミナー, 首都大学東京 (東京都・八王子市), 2013 年 6 月 25 日.

山崎 義徳, 多重ゼータ値の拡張について - 対称関数の視点から -, 第 14 回関西多重ゼータ研究会, 近畿大学 (大阪府・東大阪市), 2013 年 3 月 19 日.

山崎 義徳, Ramanujan circulant graph と Hardy-Littlewood 予想, 近畿大学数学教室講演会, 近畿大学 (大阪府・東大阪市), 2013 年 3 月 18 日.

山崎 義徳, A degree criterion for Ramanujan circulant graphs, 高知大学セミナー, 高知大学 (高知県・高知市), 2012 年 11 月 27 日.

山崎 義徳, On Ramanujan circulant graphs of odd order, Zeta and Limit Laws in OKINAWA 2012, カルチャーリゾートフェストーネ (沖縄県・宜野湾市), 2012 年 11 月 18 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 義徳 (YAMASAKI YOSHINORI)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：00533035

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし