様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４００１９

研究課題名（和文）非可換ルビン・テイト理論の一般化

研究課題名（英文）Generalization of non-abelian Lubin-Tate theory

研究代表者
三枝　洋一（Mieda, Yoichi）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：７０５２６９６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：Rapoport-Zink空間のエタールコホモロジーと局所ラングランズ対応との関係について研究を行った．GSp(4)やGU(3)等の比較的小さい群に伴うRapoport-Zink空間に対しては，Lefschetz跡公式を用いたコホモロジーの分析やZelevinsky対合との関係など，これまでGL(n)の場合にしか確認されていなかった新たな結果を得ることができた．また，より大きな群に対する場合にも有効な手法を模索し，コホモロジーに現れる表現の有限性や，等標数局所体上のLubin-Tate空間とKloosterman層との関わりなど，今後の研究の出発点となる成果を挙げることができた．

研究成果の概要（英文）：I worked on a relation between the etale cohomology of Rapoport-Zink spaces and the local Langlands correspondence. In the case where the Rapoport-Zink spaces are attached to smaller groups GSp(4) and GU(3), I obtained some new results such as the investigation of the cohomology via the Lefschetz trace formula, and the relation between cohomology and the Zelevinsky involution. These had been observed only in the case of GL(n).
Moreover, I tried to find new methods which are applicable to the case of larger groups. I proved the general finiteness result on representations appearing in the cohomology, and found the relation between the Lubin-Tate space over an equal characteristic local field and the Kloosterman sheaves. I think that these results will be a starting point of further studies in this area.

研究分野：整数論

キーワード：局所ラングランズ対応　Rapoport-Zink空間　エタールコホモロジー　リジッド幾何　p進簡約群の表現論

## １．研究開始当初の背景

p 進体 F 上の簡約代数群 G に対する局所ラングランズ対応とは，G の既約許容表現と F の絶対 Galois 群の表現（正確には G の L 群に値を持つ L パラメータ）との間によい対応があるという予想である．この予想は，局所類体論の大きな一般化であるとともに，p 進簡約代数群の表現論の発展の原動力でもあり続けており，数論，表現論の両側面から極めて重要視されている．
近年の数論幾何および保型表現論の発展に伴い，局所ラングランズ対応も大きく進展しつつある．2000 年頃には Harris-Taylor により G=GL(n)の場合の局所ラングランズ対応が解決された．さらに，Waldspurger および Ngo による基本補題の解決をもって完成した安定跡公式を用いることで，G が古典群の場合にも局所ラングランズ対応の存在はおおむね証明されたとされていた(2012 年頃)．しかし，GL(n)以外の古典群の局所ラングランズ対応は，存在が証明されただけで，十分に理解されたとは言い難い状況である．
G=GL(n)の場合には，Lubin-Tate 空間のエタールコホモロジーを用いることで局所ラングランズ対応を幾何学的に直接構成することができる（非可換ルビン・テイト理論）．その一方で，G が GL(n)以外の古典群の場合には，このような幾何学的な構成は知られておらず，大域化を経て GL(n)の場合に帰着させるという間接的な理解に留まっている．さらに，GL(n)以外の群の場合には，L パケットや A パケットの存在という，GL(n)の場合と大きく異なる現象も現れることが知られており，幾何学的な立場をはじめとする種々の視点からこの現象を明快に説明することは，専門家の間で重要な問題だと考えられていた．

## ２．研究の目的

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応および局所ラングランズ関手性を幾何学的実現を通して理解することが主要な目的である．GL(n)に対する局所ラングランズ対応および局所 Jacquet-Langlands 対応は，p 可除群の普遍変形空間である Lubin-Tate 空間のエタールコホモロジーを通して幾何学的に実現されることが知られている（非可換ルビン・テイト理論）．本研究では，Lubin-Tate 空間の一般化である Rapoport-Zink 空間のエタールコホモロジーを詳細に調べ，簡約代数群に対する局所ラングランズ対応や局所 Jacquet-Langlands 対応がコホモロジーの既約分解を通して実現されるであろうという Kottwitz の予想をできるだけ精密化した形で解決することを目標とする．また，L パケットや A パケットの存在等，GL(n)以外の群に特有な現象を幾何学的な立場から明快に説明することで，p 進簡約代数群の表現論を幾何学的に研究する新たな手段を提供することを目指す．

## ３．研究の方法

志村多様体論や保型表現論（特に安定跡公式）等の大域的な手法と，リジッド幾何学や p 進群の調和解析等の局所的な手法な手法を併用する．大域的な手法は先行研究において主に用いられてきた方法であり，強力ではあるが，欠点もある．例えば，保型表現の局所成分として現れないような表現が Rapoport-Zink 空間のコホモロジーにどのように寄与するかは全く分からない．また，主にコホモロジーの交代和に関する情報しか得られない．これを補うのが局所的な手法である．リジッド空間のエタールコホモロジーの一般論に関して私がこれまでに蓄積した結果である Lefschez 跡公式や比較定理，形式隣接輪体関手の変種の理論等を駆使して，各次数のコホモロジーに現れる表現を絞り込むことを行う．
特に大域的な手法については多くの研究が進展中であり，最新の情報が必要となるため，国内外の専門家との研究打合せや，国際研究集会での資料収集を頻繁に行う．

## ４．研究成果

(1) GSp(4)，GU(3) の Rapoport-Zink 空間

比較的小さな群である GSp(4)や GU(3)に対応する Rapoport-Zink 空間のエタールコホモロジーを詳細に調べる研究を行った．まず，本研究の開始以前から引き継ぐ形で，リジッド空間の Lefschetz 跡公式を利用してこれらのコホモロジーの交代和を調べるという研究に取り組んだ．Lefschetz 跡公式についての基礎研究は既に済んでいたが，それを適用するためにはいくつかの技術的な条件が満たされていることを確認する必要があり，その部分を詰めつつ論文を作成する作業を行った．その過程における副産物として，Rapoport-Zink 空間の新しい整モデルを得ることもできた．この成果はプレプリント
Y. Mieda, Lefschetz trace formula and l-adic cohomology of Rapoport-Zink tower for GSp(4)
にまとめた．
また，新規の研究として，Rapoport-Zink 空間のエタールコホモロジーと Zelevinsky 対合の関係を考察した．Zelevinsky 対合は A パラメータの 2 つの SL(2)を入れ換える操作にあたり，それと幾何学の関係を考えることはエタールコホモロジーと A パケットの関係を調べる際の重要なステップになると考えられるからである．GL(n)の場合には対応する結果が Fargues によって得られており，それを参考にすることで，GSp(4)や GU(3)の Rapoport-Zink 空間の l 進コホモロジーの尖

点部分に自然に Zelevinsky 対合が現れることが証明できた．さらに定式化を工夫し，形式モデルの方向にのみコンパクト台を持つ新たなコホモロジーを導入したことにより，GSp(2n)等にも有効な結果を記述することもできた．この定理の応用として，GSp(4)の 2 次コホモロジーに超尖点表現が現れないことが明らかとなった．この結果についてはプレプリント
Y. Mieda, Zelevinsky involution and l-adic cohomology of the Rapoport-Zink tower
を作成済みである．

(2) より大きな群に対応する場合

(1)で述べたように，GSp(4)や GU(3)の場合には比較的精密な結果を証明することができたが，その際の議論においては小さい群ならではの特殊事情を使っており，例えば GSp(2n)等のサイズが大きな群には適用することができない．そこで，なるべく一般の Rapoport-Zink 空間に対して適用可能な手法を見つけるという立場からも研究を行った．この方向でまず得られたのは，Rapoport-Zink 空間の既約成分の集合の有限性に関する結果である．Rapoport-Zink 空間は有限型ではないため，通常，既約成分は無限個存在するが，空間に自然に作用する群 J に関する既約成分の軌道の個数は有限個であることが期待される．この有限性は，群が不分岐な場合には Fargues によって既に得られていたが，群が分岐する場合にはまとまった結果は知られていなかった．本研究では，Rapoport-Zink 空間を与える構造付き p 可除群がアーベル多様体から来るという条件（これは常に成立すると期待されている）の下で，この有限性予想の証明を行った．証明の手法も，アーベル多様体のモジュライ空間に対する Oort の概直積構造の結果を一般化して使用するという新しいものである．応用として，このような Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに現れる表現が，「許容的」という，従来の表現論が適用可能なクラスになることがわかる．以上の結果はプレプリント
Y. Mieda, On irreducible components of Rapoport-Zink spaces
にまとめた．
また，一般の群に対応する Rapoport-Zink 空間のコホモロジーを調べるための手段として，幾何学的ラングランズ対応の手法を導入することを考案した．これは完全に新しい試みであるため，一番扱いやすい，等標数局所体上の Lubin-Tate 空間の場合をまず考察することにした．Heinloth-Ngo-Yun による Kloosterman 層の理論と Lubin-Tate 空間の幾何学を結び付けることで，単純超尖点表現というクラスの表現に対する非可換ルビン・テイト理論に明快な幾何学的説明を与えることができた．この研究はひとまず GL(n)の場合に限って行ったものであるが，Kloosterman 層の理論がかなり一般の準分裂群に対して機能することから考えると，一般化の余地は大きく残されているように感じる．これについては今後の研究課題としたい．

(3) ウェイト・モノドロミー予想への応用

非可換ルビン・テイト理論に関する先行研究について情報収集・分析を行っていた際の副産物として，Dat による，p 進一意化を持つ代数多様体に対するウェイト・モノドロミー予想の証明を少し一般化できることが判明した．Dat の結果は，Drinfeld 上半空間の商として書ける代数多様体がウェイト・モノドロミー予想を満たすというものであるが，同様の議論が Drinfeld 上半空間いくつかの積の商に対しても機能するのである．応用として，総実体上のある種の志村多様体の局所ゼータ関数を計算することができる．この結果についてはプレプリント
Y. Mieda, Note on weight-monodromy conjecture for p-adically uniformized varieties
を作成済みである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① Noriyuki Abe and Yoichi Mieda, Jacquet functor and De Concini-Procesi compactification, International Mathematics Research Notices, Online. 査読あり．DOI: 10.1093/imrn/rnu048
② Yoichi Mieda, Variants of formal nearby cycles, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 13 (2014), 701--752. 査読あり．DOI: 10.1017/S147474801300025X
③ Yoichi Mieda, Geometric approach to the local Jacquet-Langlands correspondence, American Journal of Mathematics 136 (2014), 1067--1091. 査読あり．DOI: 10.1353/ajm.2014.0028
④ Yoichi Mieda, Lefschetz trace formula for open adic spaces, Journal für die reine und angewandte Mathematik 694 (2014), 85--128. 査読あり．DOI: 10.1515/crelle-2012-0103

〔学会発表〕（計１５件）
① 三枝 洋一，Non-abelian Lubin-Tate theory and Kloosterman sheaves, 2015 早稲田大学整数論研究集会，早稲田大学（東京都・新宿区），2015 年 3 月 19 日．
② 三枝 洋一，Rapoport-Zink 空間の既約成分について，九州代数的整数論 2014，九州大学（福岡県・福岡市），2014 年 2 月

5日.
③ Yoichi Mieda, On irreducible components of Rapoport-Zink spaces, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014，東京大学（東京都・目黒区），2014年1月29日.
④ Yoichi Mieda, Zelevinsky involution and l-adic cohomology of Rapoport-Zink spaces , The Second Pacific Rim Mathematical Association Congress (PRIMA 2013)，上海交通大学，上海（中国），2013年6月25日.
⑤ 三枝 洋一，非可換Lubin-Tate理論の一般化に向けて, 2012年度日本数学会秋季総合分科会 特別講演，九州大学（福岡県・福岡市），2012年9月18日.
⑥ Yoichi Mieda, Potentially good reduction loci of open Shimura varieties and their l-adic cohomology, 2012 NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, National Center for Theoretical Sciences, National Tsing-Hua University，新竹（台湾），2012年8月30日.
⑦ Yoichi Mieda, l-adic cohomology of the Rapoport-Zink tower for GSp(4)，東京数論幾何週間，東京大学（東京都・目黒区），2012年6月7日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~mieda/index-j.html

６．研究組織

(1)研究代表者
三枝 洋一（MIEDA Yoichi）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：７０５２６９６２

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：