

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740021

研究課題名(和文) 双対的な作用と微分概念の拡張、非可換不変式論

研究課題名(英文) Dual pairs of group actions, generalizations of derivations, and noncommutative invariant theory

研究代表者

伊藤 稔 (Itoh, Minoru)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：60381141

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：外積代数における不変式論を研究した。反可換版のCayley-Hamilton型定理がいろいろ得られ、そのひとつひとつがAmitsur-Levitzki型の定理と結びつく。またtwisted immanantという興味深い性質をもつ新しい行列関数を得た(immanantの類似)。また以前に構成したテンソル代数の微分のq類似を与えた。これを利用して量子展開環 $U_q(\mathfrak{gl}(V))$ の $T_n(V)$ への自然な作用も記述できる。さらに量子展開環とA型のIwahori-Hecke代数の間の双対性(q-Schur-Weyl双対性)の新しい証明もできる。

研究成果の概要(英文)：We studied invariant theory for exterior algebras. One of the main results is some anticommuting analogues of the Cayley-Hamilton theorem, which are closely related to Amitsur-Levitzki type theorems. We also obtained a new matrix function named the "twisted immanant," and found its interesting properties. Moreover, we gave a q-analogue of derivations on tensor algebras. Using these derivations, we can describe the natural action of the quantum enveloping algebra $U_q(\mathfrak{GL}(V))$ on $T_n(V)$. Furthermore, we obtained a new proof of the q-Schur-Weyl duality (the duality between $U_q(\mathfrak{GL}(V))$ and the Iwahori-Hecke algebra of type A).

研究分野：不変式論

キーワード：不変式論 外積代数 テンソル代数 Cayley-Hamilton定理 Amitsur-Levitzki定理 Schur-Weyl双対性

1. 研究開始当初の背景

本研究は過去の Dual pair 理論, Capelli 型恒等式, 普遍包絡環の研究の延長上にある。これまでの研究で, 微分概念やその一般化が, 不変式論や双対的な作用の研究の鍵となる様子が浮かんできていた。とくに [1] におけるテンソル代数の拡張 (一種の微分ができるようにテンソル代数を拡張したもの) の研究を通じて, この認識が深まった。

第一に, 多項式環の不変式論は, 多項式係数微分作用素環の不変式論への読み替えを通じて, 表現論と密接な関係がある。たとえば, 表現に関して多くの情報をもたらす Howe dual pair は多項式環における古典的な不変式論の結果 (不変式の生成元の記述) の微分作用素環への読み替えで得られる [H], [HU]。また, 逆に, dual pair における不変微分作用素の対応の記述でもある Capelli 型恒等式は, 多項式環の不変式論の第一基本定理の証明で役立つ。外積代数でも内部微分が同じような役割を果たす。同じような文脈で, [1] で導入したテンソル代数の拡張は, テンソル代数での不変式論・表現論 (Schur-Weyl 双対性など) に応用できた。

第二に, 非可換母函数の手法でも, 微分概念の拡張を鍵とする進展があった。普遍包絡環や微分作用素環の研究では, 代数の非可換性に研究の難しさがあるが, 非可換母函数はこれに対処する強力な手法である。原型は外積代数において行列式などを扱う手法だった。この手法が本研究課題の開始直前には, [1] で導入したテンソル代数の拡張に大きく進化していた。この方法は, 一般線型リー環の普遍包絡環の中心の線型基底 (quantum immanant) ややそれに関係する Capelli 型恒等式に対しては非常に効果的だった (しかし一般線型リー環以外の古典リー環に対しては部分的にしかうまくいかなかった)。

このように微分という概念が非可換代数の不変式論に複数の意味で絡んできていた。

[H] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 539-570.

[HU] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicityfree actions, Math. Ann. 290 (1991), no. 3, 565-619.

[1] M. Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Comm. Algebra 40 (2012), no. 9, 3442-3493.

2. 研究の目的

非可換代数における不変式論を, 微分概念の拡張を指針に推進する。

念頭におく代数は, 多項式環, 外積代数, テンソル代数, これらの上の微分作用素の代数 (すなわち Weyl 代数, Clifford 代数, [1] で導入したテンソル代数のさまざまな拡張),

リー環の普遍包絡環, 対称群などの群環, Brauer 代数, さらに以上の q 類似などである。これらは研究の対象であると同時に, 別の空間・代数への作用を考えたり, 非可換母函数の舞台にしたりすることで, 研究の手段にもなりうる。

特にテンソル代数における微分概念の研究を押し進め, これを利用して表現論や不変式論を調べることが第一の目標だった。

具体的に狙っていたことのひとつは, 一般線型リー環以外の古典リー環の普遍包絡環の中心の線型基底の記述であった。固有値の研究 [00] はあるが, 具体的な表示や Capelli 型の恒等式は未解明である。一般線型リー環と同様の方法では, 奇妙な双対性をともなう障害が出てくる。

また多項式環や外積代数における不変式論で, Cayley-Hamilton の定理やその類似で生成元の記述ができるようなものがいくつか見つかっていた。これらをやはり非可換母函数や微分概念の拡張を利用して制御するということを目標としていた。

[00] A. Okounkov and G. Olshanski, Shifted Schur functions II. Binomial formula for characters of classical groups and applications, in "A. A. Kirillov Seminar on Representation Theory," Amer. Math. Soc. Translations (2) Vol. 181, (1998), pp. 245-271.

3. 研究の方法

基本的には一人で研究を進めた。文献から関連研究について学び, 具体例などの実験, 試行錯誤を重ねた。それ以外に研究集会における次のようなことが役立った:

(1) 表現論が主題の研究集会での研究交流。表現論を主題とする研究集会で, 新しい研究成果などの情報を得て, 研究の進め方について検討を加えた (表現論シンポジウムや, 数理解析研究所での研究集会など)。

(2) 研究集会における発表や集中講義。研究集会での発表を通じて, 専門家からの疑問・コメントなどをもらい, 研究方法, 研究成果について検討を加えた。また 2012 年度の高知大学での集中講義, 2013 年度の広島大学での集中講義で, 主に外積代数の不変式論についてまとまった話をする機会が得られたこと, また 2013 年の 3 月に特に九州大学で「Cayley-Hamilton 型定理と不変式論」という題目で連続講演ができたことも研究の大きな助けになった。

4. 研究成果

(1) 第一の成果は, 外積代数における不変式論に関するものである。 n 次の正方行列のなすベクトル空間の上の外積代数に n 次の一般線型群が共役で作用する。この作用に関する不変元に関して, 次の結果を得た。まずこの不変元のなす部分代数は n 個の元

で生成される外積代数に同型となる。そしてこれらの不変元の生成元を係数とする Cayley-Hamilton 型の定理がなりたつ(これは不変式論の第二基本定理とも見なせる)。これらの結果は固有多項式に関する線型代数の初等的な事実の反可換版と言える。またこの Cayley-Hamilton 型の定理は, Polynomial identity の理論の先駆けである Amitsur-Levitzki 定理の精密化とも見なせる。

舞台となる外積代数と作用する群を取り替えることによって, 別の Cayley-Hamilton 型の定理や Amitsur-Levitzki 型の定理が同じような方法で得られる。たとえば交代行列のなすベクトル空間の上の外積代数とそれに作用する直交群で同じような議論をすると, Kostant による Amitsur-Levitzki 型の定理の新証明を与える。さらに交代行列のなすベクトル空間と対称行列のなすベクトル空間の直和の上で外積代数を考えて, これに作用する一般線型群に関して同じような議論を行うと, Gianbruno の 1990 年の結果を精密化した新しい Amitsur-Levitzki 型定理を得る。これらの結果を論文²にまとめた。

またこの外積代数の不変式を表す手段として twisted immanant という新しい行列関数を導入した。immanant の「twisted な類似」と言える。通常の immanant は対称群の既約指標(共役に関して不変)を用いて定義するが, この既約指標を共役に関して交代的な関数で置き換えるのである。この twisted immanant は, 通常の immanant と同様に Cauchy-Binet 恒等式の類似をみだす。また反可換な成分の行列に対して次のような応用がある: (i) 共役に関する不変元の記述, (ii) Cauchy 関係式の類似。これらの twisted immanant に関する結果を論文¹にまとめた。

その後, twisted immanant については, higher Capelli identity の類似などの成果も上がっている。Twisted immanant は反可換成分の行列の不変式論を記述するために導入した概念であるが, 反可換の枠組み以外でも意味をなす。これらの結果は, twisted immanant が広い枠組みにおいて自然な存在であるということを示唆する。

(2) 以前に構成したテンソル代数の拡張に対して, その q 類似を与えた。これはテンソル代数と A 型の Iwahori-Hecke 代数の融合した代数と見なせる。この代数には自然に「微分」が考えられて, これを利用して量子展開環 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の自然な作用も記述できる。さらに量子展開環と A 型の Iwahori-Hecke 代数の間の双対性 (q -Schur-Weyl 双対性) の新しい証明もできる。

これらの結果を論文⁴にまとめた。

(3) 高階の Cayley-Hamilton 定理が第二基本

定理を与える不変式論の研究を進めた。これはトレース付き代数と対称群の環積の理論として整理できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

1 Minoru Itoh, Twisted immanant and matrices with anticommuting entries, Linear and Multilinear Algebra, 査読あり, 発表予定.

DOI: 10.1080/03081087.2015.1112343

2 Minoru Itoh, Invariant theory in exterior algebras and Amitsur-Levitzki type theorems, Advances in Mathematics, 査読あり, Vol. 288, 2016, 679-701.

DOI: 10.1016/j.aim.2015.09.033

3 Minoru Itoh, A q -analogue of derivations on the tensor algebra and the q -Schur-Weyl duality, Letters in Mathematical Physics, 査読あり, Vol. 105, No. 10, 2015, 1467-1477.

DOI: 10.1007/s11005-015-0793-7

4 Minoru Itoh, Extensions of the tensor algebra and their applications, Communications in Algebra, 査読あり, Vol. 40, No. 9, 2012, 3442-3493.

DOI: 10.1080/00927872.2011.590952

[学会発表](計 12 件)

1 伊藤稔, Twisted immanant and matrices with anticommuting entries, RIMS 研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」, (2015 年 6 月 26 日), 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)。

2 伊藤稔, Cayley-Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorems of invariant theory, RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, (2014 年 3 月 6 日), 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)。

3 伊藤稔, Cayley-Hamilton 型定理と不変式論, 2013 年度表現論シンポジウム, (2013 年 11 月 28 日), マホロバ・マイズ三浦(神奈川県三浦市)。

4 伊藤稔, Invariant theory in exterior algebras, RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析の研究」, (2012 年 6 月 19 日), 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)。

5 Minoru Itoh, Invariant theory for exterior algebras, International Conference on Geometry, Number Theory and Representation Theory, (2012 年 10 月 10 日), Inha University, Incheon (Korea).

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況（計0件）

取得状況（計0件）

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 稔 (ITOH MINORU)
鹿児島大学・理工学域理学系・准教授
研究者番号：60381141

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：