様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：３２６５２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００２７

研究課題名（和文）頂点作用素代数と標数３の直交群の研究

研究課題名（英文）Research on vertex operator algebras and orthogonal groups of characteristic 3

研究代表者
山内　博（Yamauchi, Hiroshi）

東京女子大学・現代教養学部・准教授

研究者番号：４０４５２２１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：頂点作用素代数上に３互換群，特に標数３の直交群を実現する研究を行った。本研究では以下の成果を得た。(1)中心電荷4/5のシグマ型ヴィラソロ元の定める宮本の自己同型を用いることで３互換群を構成し，また４元符号を用いて３互換群が作用する頂点作用素代数の構成法を与えた。特にヘキサ符号に付随した頂点作用素代数を考えることで，標数３の８次直交群を実現した。(2)３次元のグライス代数を用いることで宮本の自己同型の型を具体的に決定する結果を得た。(3)群の位数２の元の共役類と頂点作用素代数のヴィラソロ元の間のコンウェイ・宮本対応を定式化し，２３次および２２次フィッシャー群に対してこれを確立した。

研究成果の概要（英文）：I have studied 3-transposition groups, especially orthogonal groups of characteristic 3, acting on vertex operator algebras. The following are accomplished. (1) By considering Miyamoto involutions associated to Virasoro vectors of central charge 4/5 of sigma-type, I gave a construction of 3-transposition groups acting on vertex operator algebras, and also I provided a construction of vertex operator algebras based on linear codes over the field of order 4 on which 3-transposition groups act. In particular, I realized the orthogonal group of degree 8 over the field of order 3 as an automorphism group of a vertex operator algebra constructed from Hexacode. (2) I obtained a result determining the type of Miyamoto involutions based on 3-dimensional Griess algebras. (3) I formulated the Conway-Miyamoto correspondence between involutions of groups and Virasoro vectors of vertex operator algebras and I have established the correspondences for the second and third largest Fischer groups.

研究分野：頂点作用素代数

キーワード：頂点作用素代数　ヴィラソロ代数　３互換群　直交群　散在型有限単純群　フィッシャー群

１．研究開始当初の背景
中心が自明な３互換群は分類されており，斜交型，直交型，ユニタリー型，例外型の四つに分けられる。その構造はこの順に複雑になっている。有限３互換群にはフィッシャー空間と呼ばれる有限幾何構造が付随し，逆にフィッシャー空間からは（中心の違いを除いて）元々の３互換群を復元することができる。そのため３互換群の研究は有限幾何構造に関する組合せ論と相性が良い。フィッシャー空間が与えられたとき，その隣接構造を用いて松尾代数と呼ばれる冪等元から生成される可換非結合的代数が構成される。連結な３互換群に付随する松尾代数が頂点作用素代数のグライス代数として実現できる場合，頂点作用素代数上に３互換群の自然な作用が実現でき，このとき各互換とヴィラソロ元の間には宮本の自己同型を考えることで一対一対応が与えられる。互換に対応するヴィラソロ元が中心電荷が 1/2 でシグマ型の場合，上記の方法で実現できる３互換群は分類されており，斜校型のみが現れる。次のステップとして，直交型の３互換群を頂点作用素代数の自己同型群として系列的に実現することが課題であった。これは後述するモジュラームーンシャイン現象との関わりもあり，有限群と頂点作用素代数の未知なる関係を示す一つの緒として重要な問題であった。

２．研究の目的
様々な群，特に有限群を頂点作用素代数の自己同型として系列的に実現することはそれ自体興味を引く問題であるが，特に３互換群の場合，その群構造は付随するフィッシャー空間に記録されており，これを頂点作用素代数における何らかの構造として記述する理論があれば，３互換群が単に作用するだけでなく，その理由も頂点作用素代数構造に由来するものとして，極めて自然に理解できるようになる。このような研究は中心電荷 1/2 のシグマ型ヴィラソロ元の場合に完成しているが，そこでは斜交型の３互換群しか得られないことが分かっていた。斜交型を超えるクラスとして，直交型の３互換群を実現するには，ヴィラソロ元の中心電荷を変えて考える必要があるが，中心電荷が 1/2 以外の場合にはどのような宮本の自己同型を考えれば３互換性を満たすのかよく分かっていなかった。研究代表者は中心電荷 4/5 のヴィラソロ元に対してもシグマ型の概念を定式化することで，３互換性が満たされることに気がつき，中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元から得られる３互換群の分類を行い，３互換群の作用を実現する頂点作用素代数を系列的に構成する問題に行き着いた。この応用として次のような目論見もあった。中心電荷 1/2 のシグマ型ヴィラソロ元から生成される３互換群のうち，最も例外的なものとして標数２の１０次直交群があるが，これはムーンシャイン頂点作用素代数の Z2 軌道体構成法を考えた際に，単純カレント拡大の様子を記述する群として現れる。これまでの研究の経緯から，中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元で生成される３互換群として標数３の８次直交群が例外的に現れ，これがムーンシャイン頂点作用素代数の Z3 軌道体構成法の理解に役立つことが推察された。特に３互換群のフュージョン代数への作用を用いることで３群による単純カレント拡大としてムーンシャイン頂点作用素代数を記述できれば，その Z[1/3]形や整形について理解が深まり，モジュラームーンシャイン現象への応用が期待できた。そこで中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元を用いた３互換群，特に標数３の直交群を実現することを目的に研究を行った。

３．研究の方法
直交型の３互換群を実現するために中心電荷 4/5 のヴィラソロ元に対してシグマ型の概念を導入し，付随する宮本の自己同型を考え，３互換性を確認した。シグマ型のヴィラソロ元を持つ頂点作用素代数を構成するため，A2 型格子に付随した頂点作用素代数の位数３の自己同型による固定点を考え，そのテンソル積をとり，これを拡大して得られる頂点作用素代数のクラスを考察した。このような拡大は４元体上の線形符号を用いて記述することも可能であり，よい符号であるヘキサ符号を用いれば例外的な中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元が得られることを確認した。また，逆に４元体符号から A2 型格子頂点作用素代数の固定点のテンソル積の拡大として構成される頂点作用素代数において，中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元で標準的でない，例外的なものが現れるのはどのような符号を用いた場合か研究し，本質的にヘキサ符号の場合のみ，例外性があることを確認した。格子と符号に関しては中華民国中央研究院の Ching Hung Lam 氏が詳しく，氏との共同研究として進めた。以上は松尾代数を用いた３互換群の構成に関する研究であるが，松尾代数では記述できない，イジング元の６互換性から導かれる非自明な３互換群の実現方法についても研究を行った。この場合，互換とヴィラソロ元の間の対応を頂点作用素代数の内在的な対称性として記述するには中心電荷を変えて議論する必要があり，また宮本の自己同型の型も適切に取り替える必要があった。そこで宮本の自己同型の型を決定する問題，および新しい３互換群の構成法と互換とヴィラソロ元の対応関係を定式化する研究を行った。これをムーンシャイン頂点作用素代数に応用し，例外型３互換群である２３次および２２次のフィッシャー群を頂点作用素代数の自己同型として記述した。こちらも中華民国中央研究院の Ching Hung Lam 氏と共同で議論を行い，研究を進めた。

４．研究成果

中心電荷 4/5 のヴィラソロ元を用いた標数３の直交群を３互換群として実現する研究は以下の方針で研究を進めた。中心電荷 4/5 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数はウェイト３のプライマリー表現を単純カレントに持ち，W3 代数へと拡大することができる。W3 代数のフュージョン規則には位数３の対称性があるが，位数３の対称性が自明に作用する部分ではヴィラソロ頂点作用素代数のプライマリー表現として最高ウェイトは 0, 2/5, 7/5, 3 の四つが現れるが，W3 代数の表現と見れば最高ウェイトは 0, 2/5 の二つだけとなり，局所的に位数２の対称性が現れる。ここに目をつけ，中心電荷 4/5 のヴィラソロ元に対し，シグマ型の定義を導入し，対応する松尾代数を考えた場合，宮本の自己同型が３互換性を満たすことを確認した。中心電荷 4/5 のヴィラソロ元は A2 型格子頂点作用素代数から自然に構成することができる。シグマ型のヴィラソロ元を得るため，二乗ノルムが４に調整された A2 型格子の直和を含む格子頂点作用素代数を考え，A2 型格子が持つ位数３の固定点なしの自己同型を全体へと拡張し，それによる不動点部分代数を考察した。このようにして得られる頂点作用素代数は A2 型格子頂点作用素代数の不動点部分代数と４元体に付随する線形符号を用いて構成・記述することも可能である。４元体符号においては非自明な自己双対的符号であるヘキサ符号が特別な例として考えられ，ヘキサ符号に対応する格子である１２次元のコクセター・トッド格子の場合を重点的に調べた。コクセター・トッド格子には標数３の６次直交群が作用しているが，対応する頂点作用素代数には例外的に構成される中心電荷 4/5 のシグマ型ヴィラソロ元が存在し，その結果対称性も例外的に大きくなり，標数３の６次直交群は８次まで拡大され，これをヴィラソロ元から生成される３互換群として構成することができた。以上の成果を論文としてまとめ，学術誌に投稿し，掲載を受理された。

中心電荷 1/2 のヴィラソロ元はイジング元とも呼ばれる。シグマ型と限らないイジング元に付随する宮本の自己同型を考えた場合，一般には３互換群にはならず，６互換性を満たし，モンスターをはじめとする様々な群を実現する。二つのイジング元が生成する部分代数は対応する群にちなんで二面体部分代数と呼ばれ，その性質はよく分かっている。特に 3A 型と呼ばれるものは中心電荷 4/5 のヴィラソロ元およびその拡大である W3 代数を部分代数に持つ。3A 型の二面体部分代数を真に含む二面体部分代数は 6A 型に限るが，これは 3A 型部分代数の生成元である二つのイジング元にもう一つイジング元を追加して得られ，このとき追加されたイジング元は元々の二つのイジング元と 2A 型の部分代数を生成する。6A 型二面体部分代数のように 3A 型二面体部分代数に 2A 型の二面体部分代数を添加して得られる部分代数を考えると，そのグライス代数は松尾代数では記述できない，より複雑な構造を持つが，二面体部分代数の分類結果を応用することで，2A 型のイジング元から生ずる宮本の自己同型が生成する部分群は３互換性を満たすことが証明できた。この結果はモンスターの部分群構造の考察から得られた。２４次および２３次のフィッシャー群のモンスターへの入り方を観察すると，２４次の方は位数３の群による拡大としてモンスターに入っているが，２３次の方は 3A 型部分代数に対応するモンスターの３次対称群の中心化群として，拡大を伴わずにモンスターの部分群になっており，これはベビーモンスターおよび２４次フィッシャー群の共通部分としても捉えることができる。この観察と互換とヴィラソロ元の対応関係にもとづいて，2A 型および 3A 型二面体部分代数を組合せた (2A, 3A) 生成部分代数の意義を見出し，ムーンシャイン頂点作用素代数に限らず，一般の頂点作用素代数において先述の３互換群を部分群として取り出す結果を導いた。この構成法の利点は互換の中心化群をとる３互換群の帰納的構造と (2A, 3A) 生成部分代数の交換団部分代数への作用が両立することであり，特にムーンシャイン頂点作用素代数にこの構成法を適用した場合，２４次，２３次および２２次のフィッシャー群が系列的に得られる。（２２次フィッシャー群の次の群は PSU(6, 2) であるが，これも同様の方法で得ることができる。この群は２１次フィッシャー群とも考えることができる。）ただしこの構成法では松尾代数の場合とは異なり，宮本の自己同型とヴィラソロ元の間の対応は自明ではなく，互換を定める自己同型はイジング元に付随したものであるが，各イジング元は３互換群が忠実に作用する交換団部分代数には属しておらず，自己同型群の作用を受け持つ頂点作用素代数から見れば外側からの作用であり，頂点作用素代数の対称性として内在的な記述とはなっていなかった。(2A, 3A) 生成部分代数の構造を調べることで，イジング元の定める宮本の自己同型は交換団部分代数におけるイジング元とは異なるヴィラソロ元に付随する宮本の自己同型として記述できることが推察された。同じ自己同型が異なるヴィラソロ元を用いて記述されているのである。そこでヴィラソロ元と宮本の自己同型との間の対応としてどのようなものが自然といえるのか考察し，中心化群の作用を込みで考えるのが適切であろうという結論にいたり，これをコンウェイ・宮本対応として厳密に定式化した。この対応では様々な中心電荷のヴィラソロ元を考えるが，上述した (2A, 3A) 生成部分代数の交換団を系列的に考えた場合，宮本の自己同型の型が一定ではないことに気がついた。先述したフィッシャー群の系列に対しコンウェイ・宮本対応を確立するにはこの型を決定する必要性が出てきた。一般に頂点作用素代数とそのヴィラソロ元が与えられ

たとき，その型を決めるのは容易ではなく，個別の例に対し答えを推察することはできたが，一般的に決めることは難しかった。この問題の解決には苦労したが，N=1 超ヴィラソロ代数の表現論を考えればよいことに気がつき，その表現論のうち未完である部分を補完し，宮本の自己同型の型を系列的に記述する結果を確立した。これは３次元のグライス代数構造で特徴づけられる小さな頂点作用素代数を用いることで得られた。このグライス代数構造は３次元と非常に簡単なため，具体例において容易に確認することができ，今回考えている(2A,3A)型部分代数の交換団部分代数にも一般的に適用できるものである。以上の結果をまとめて，これまで知られていなかった２３次および２２次フィッシャー群に対するコンウェイ・宮本対応を確立することができた。(最大である２４次のフィッシャー群については研究代表者の先行研究ですでに示されている。）これらの結果はすべてコンウェイ・宮本対応に関する一連の研究成果であり，一つの論文としてまとめたいところであったが，３次元グライス代数と宮本の自己同型の型に関する部分は難しくはないが正確にまとめると冗長であるため，この部分の成果は切り分け，二つの論文としてまとめ，プレプリントサーバーおよび学術誌に投稿した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

①Ching Hung Lam and Hiroshi Yamauchi, On 3-transposition groups generated by σ-involutions associated to c=4/5 Virasoro vectors, Journal of Algebra 416 (2014), 84-121. doi:10.1016/j.jalgebra.2014.06.009

（査読有）

②Hiroshi Yamauchi, Extended Griess algebras and Matsuo-Norton trace formulae, Conformal Field Theory, Automorphic Forms and Related Topics 75-107. Contributions in Mathematical and Computational Sciences, Springer, 2014.
（査読有）

③Hiroshi Yamauchi, Extended Griess algebras, conformal designs and Matsuo-Norton trace formulae, Symmetries and groups in contemporary physics, 423-428. Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys., 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013.
（査読有）

〔学会発表〕（計　２２　件）

①Hiroshi Yamauchi, On Conway-Miyamoto correspondences Workshop on Finite Groups, VOA, and Algebraic Combinatorics, March 23th, 2016 , Foguang University, Yilan (Taiwan)

②山内 博，宮本の自己同型の型について，日本数学会 2016 年度年会,2016 年３月 19 日，筑波大学（茨城県つくば市）

③Hiroshi Yamauchi, VOAs generated by 3-dimensional Griess algebras, Vertex Operator Algebras and Related Topics, September 8th, 2015, Sichuan University, Chengdu (China)（招待講演）

④山内 博，N=1 ラモン代数のユニタリ系列と有理性，第 27 回有限群論草津セミナー，2015 年８月３日,草津セミナーハウス（群馬県草津町）

⑤Hiroshi Yamauchi, Extensions of sequential pairs of unitary Virasoro VOAs, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, March 8th, 2015, National Taitung University, Taitung (Taiwan)

⑥Hiroshi Yamauchi, Sporadic finite simple groups and Conway-Miyamoto correspondence, Infinite Dimensional Lie Theory and its Applications, December 16th, 2014, Harish-Chandra Research Institute, Allahabad (India)（招待講演）

⑦山内 博，拡大グライス代数における二面体部分代数，第 26 回有限群論草津セミナー，2014 年８月２日,草津セミナーハウス（群馬県草津町）

⑧山内 博，ベビーモンスター頂点作用素超代数の二面体部分代数，第３１回代数的組合せ論，2014 年６月 20 日，東北大学片平さくらホール（宮城県仙台市）

⑨山内 博，散在型単純群と Conway-宮本対応，愛媛代数セミナー，2014 年６月９日，愛媛大学（愛媛県松山市）

⑩Hiroshi Yamauchi, Dihedral subalgebras of extended Griess algebras, Hualien Workshop on Finite Groups, VOA, Algebraic Combinatrics and Related Topics, March 20th, 2014, National Dong Hwa University, Hualien (Taiwan)

⑪山内 博，モンスター群と頂点作用素代数，

頂点作用素代数と超弦理論，2014 年 1 月 31 日，立教大学（東京都豊島区）

⑫Hiroshi Yamauchi, Transposition automorphisms of vertex operator algebras, Seminar on Conformal Field Theory, December 13th, 2013, Technischen Universität Darmstadt (Germany)（招待講演）

⑬山内 博，頂点作用素代数と散在型 3 互換群，日本数学会北海道支部会講演会，2013 年 12 月 5 日，北海道大学（北海道札幌市）（招待講演）

⑭Hiroshi Yamauchi, 3-transposition groups induced by (2A,3A)-subalgebras, Majorana Theory, the Monster and Beyond, September 16th, 2013, Imperial College London (UK)（招待講演）

⑮山内 博，頂点作用素代数上で実現される 3 互換群，第 58 回代数学シンポジウム，2013 年 8 月 26 日,広島大学（広島県東広島市)(招待講演）

⑯山内 博，(2A,3A)-generated subalgebras and 3-transposition subgroups on a vertex operator algebra，ムーンシャインを超えて，2013 年 7 月 12 日，ホテル華乃湯（宮城県仙台市）（招待講演）

⑰Hiroshi Yamauchi, (2A,3A)-generated subalgebras and 3-transposition subgroups of a vertex operator algebra, Representation Theory XIII, June 26th, 2013, Inter-University Centre, Dubrovnik (Croatia)（招待講演）

⑱Hiroshi Yamauchi, On 3-transposition groups based on the 3A-algebra, Taitung Workshop, March 27th, 2013, Taitung University, Taitung (Taiwan)

⑲Hiroshi Yamauchi, Miyamoto involutions, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 2012 年 9 月 10 日，筑波大学（茨城県つくば市）（招待講演）

⑳Hiroshi Yamauchi, 3A-algebra and 3-transposition property, Conference on Vertex Operator Algebras and Related Topics, August 25th, 2012, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai (China)（招待講演）

㉑ Hiroshi Yamauchi, Extended Griess algebras, conformal designs and Matsuo-Norton trace formulae, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, August 20th, 2012, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin (China)（招待講演）

㉒山内 博，共形デザインについて，第 24 回有限群論草津セミナー，2012 年 7 月 28 日，草津セミナーハウス(群馬県草津町)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
山内 博
http://www.math.twcu.ac.jp/~yamauchi

６．研究組織
(1)研究代表者
山内 博 (YAMAUCHI, Hiroshi)
東京女子大学・現代教養学部・准教授
研究者番号：40452213

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：