

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740029

研究課題名(和文)ゼータ関数の解析的性質とその周辺

研究課題名(英文)Analytic properties of zeta functions

研究代表者

中村 隆(Nakamura, Takashi)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：50532355

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は主に3つに分けられる。(1)多重ゼータ関数の値の明示公式、値の関係式、関数関係式、(2)ゼータ関数の値分布、主に普遍性、(3)その他の研究(ソボレフ不等式の最良定数、ゼータ分布と無限分解可能分布)。について研究を行った。それらを互いに結びつける研究も行った。
2010 Mathematics Subject Classification で言えば、11M06, 11M26, 11M32, 11M35, 60E07 が該当する。

研究成果の概要(英文)：The research I did is divided into 3 parts: (1) Multiple zeta values, Multiple zeta functions and their functional relations, (2) Value distribution, (especially, Universality) of zeta functions and L-functions, (3) Infinitely divisible distributions, Zeta distributions. These are corresponding to 2010 Mathematics Subject Classification 11M06, 11M26, 11M32, 11M35.

研究分野：数論

キーワード：Multiple zeta values Multiple zeta functions Value distribution Universality divisible distributions Zeta distributions

1. 研究開始当初の背景

(1) 確率論においてゼータ分布というものがある。これは Riemann ゼータ関数を正規化したものを特性関数として持つ分布のクラスとして定義され、1930 年代後半の文献から記録が残っている。しかしこの分布は 20 世紀の間に多くの注目を浴びることはあまりなかった。

(2) ゼータ関数の普遍性とは、任意の零点を持たない正則関数は Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動により一様に近似でき、さらに近似できる密度は正になるという定理である。この定理は 1975 年に Voronin により証明された。任意の複素数を近似できるという形では、1914 年に Bohr が Courant との共著で示している。

1982 年に Bagchi は、Riemann 予想は Riemann ゼータ関数が自己近似性を持つ、即ち Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動により Riemann ゼータ関数が近似される、と同値であることを示した。

(3) Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の発端は Euler による 1775 年の論文である。これが再び注目されたのは 1990 年代に入ってからで、量子群や結び目不変量、数論幾何学など多方面との関連により、Euler-Zagier 型多重ゼータ値、即ち変数が全て自然数である場合が注目されるようになった。

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の一般化である Witten ゼータ関数は量子ゲージ理論に関連して Witten により定義され、Zagier が再定式化し、松本氏により多変数関数として再定義された。

2. 研究の目的

研究内容は大きく 3 つに分けられる。

(1) 多重ゼータ関数の値の明示公式、値の関係式、関数関係式、

(2) ゼータ関数の値分布、主に普遍性、

(3) その他の研究 (ソボレフ不等式の最良定数、ゼータ分布と無限分解可能分布)。

これら 3 つの研究の方向からゼータ関数の解析的性質を明らかにすると同時に、ゼータ関数を数論や確率論の探求に応用すること、あるいはその逆を研究目的としている。

3. 研究の方法

種々の方向から同時にゼータ関数の核心に迫るという方法を用い、具体的なゼータ関数からより抽象的なゼータに考察の対称を広げるといった方法で研究を遂行した。

上に挙げた 3 つの視点は互いに関連しているので、一方が進展すれば他方の研究にも良い影響があった。

4. 研究成果

次に述べる発表論文の代表的なものである、論文 について概要を述べる。

(1) ゼータ分布

Riemann 予想は数論最大の未解決問題の一つである。一方、ある分布が無限分解可能分布があるかどうかを判定するのは確率論において非常に重要である。この論文では完備 Riemann 分布を定義し、それが $1/2 < \sigma < 1$ において弱無限分解になるための必要充分条件は Riemann 予想が正しいことを示した。さらに完備 Riemann 分布は $\sigma = 1$ において弱無限分解になり、 $\sigma > 1$ においては擬無限分解になることを証明した。

ゼータ関数を適当に正規化することにより、絶対収束領域だけでなく臨界領域においてもゼータ分布が定義されることを示した。数論への応用として、複素数 c がある条件を充たすとき、 $\zeta(s) + c^s$ がある領域において零点を持たないことを証明した。

2次元有限 Euler 積が、無限分解可能分布を生成するか、擬無限分解可能分布を生成するか、特性関数にすらならないかを判定した。主結果は確率論に分類されるが、その証明には Kronecker の近似定理という数論で良く知られた定理が用いられている。この論文で 2次元擬無限分解可能分布が導入された。多次元の擬無限分解可能分布の例はこれまで知られていなかったもので、価値があると思われる。

(2) ゼータ関数の普遍性

λ を複素数とすると、 $\zeta(s + \lambda + i\tau)$ は $\zeta(s + i\tau)$ を近似できるかという問題を考えた。これまでの多くは 2 つのゼータ関数は 2 つとも絶対収束域又は臨界領域の場合だけ考察されていたが、今回は、一つは絶対収束域、もう一つは臨界領域という場合も議論した。この論文でお互いに近似できない例も得られている。

(3) Euler-Zagier 型多重ゼータ関数

重さが奇数であるレベル 2 の 2重ゼータ値の張る空間の生成元を交代 2重ゼータ値の明示公式を使うことにより与えた。さらに金子氏と田坂氏により与えられたレベル 2 の 2重ゼータ値の和公式の別証明も与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Takashi Nakamura, A complete Riemann zeta distribution and the Riemann hypothesis, Bernoulli Journal, **21** (2015), no.1, 604-617.
DOI: 10.3150/13-BEJ581

Takashi Nakamura, A modified Riemann zeta distribution in the critical strip,

Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no.2, 897-905.
DOI:10.1090/S0002-9939-2014-12279-9

Takashi Nakamura and Lukasz Pankowski, On zeros and c-values of Epstein zeta-functions, Siauliai Mathematical Seminar (Special volume celebrating the 65th birthday of Professor Antanas Laurincikas) **8** (2013), 181-196.
http://siauliai.aims.su.lt/index.php?option=com_content&view=article&id=319&Itemid=7

Syota Mizukami and Takashi Nakamura, Generalized Hurwitz Zeta Distributions, Siauliai Mathematical Seminar (Special volume celebrating the 65th birthday of Professor Antanas Laurincikas) **8** (2013), 151-160.
http://siauliai.aims.su.lt/index.php?option=com_content&view=article&id=319&Itemid=7

Takahiro Aoyama and Takashi Nakamura, Behaviors of multivariable finite Euler products in probabilistic view, Mathematische Nachrichten. **286** (2013), no.17-18, 1691-1700.
DOI:10.1002/mana.201200151

Takahiro Aoyama and Takashi Nakamura, Multidimensional Shintani zeta functions and zeta distributions on \mathbb{R}^d , Tokyo Journal Mathematics. **36** (2013) no.2, 521--538.
DOI: 10.3836/tjm/1391177986

Takashi Nakamura, A quasi-infinitely divisible characteristic function and its exponentiation, Statistics and Probability Letters. **83** (2013), no.10, 2256--2259.
DOI: 10.1016/j.spl.2013.06.015

Takashi Nakamura and Lukasz Pankowski, Self-approximation for the Riemann zeta function, Bulletin of the Australian Mathematical Society. **87** (2013), no.3, 452--461.
DOI: 10.1017/S0004972712000846

Takashi Nakamura, and Koji Tasaka, Remarks on double zeta values of level 2, J. Number Theory. **133** (2013), no.1, 48--54.
DOI: 10.1016/j.jnt.2012.07.005

Takashi Nakamura, A simple proof of the functional relation for the Lerch type

Tornheim double zeta function, Tokyo Journal Mathematics. **35** (2012), no.2, 333--337.
DOI: 10.3836/tjm/1358951322

Takashi Nakamura and Lukasz Pankowski, Erratum to: The generalized strong recurrence for non-zero rational parameters, Arch. Math. (Basel). **99** (2012), no.1, 43--47.
DOI: 10.1007/s00013-010-0205-2.

〔学会発表〕(計 8 件)

Takashi Nakamura, Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions, The conference of Zeta Functions of Several Variables and Applications, 名古屋大学 (愛知県名古屋市) 2015. 11. 12.

Takashi Nakamura, Joint universality for Lerch zeta-functions, French-Japanese Workshop on multiple zeta functions and applications, Saint-Etienne (France), 2015, 9.7.

Takashi Nakamura, A complete Riemann zeta distribution and the Riemann hypothesis, 第8回ゼータ若手研究集会, 名古屋大学 (愛知県名古屋市) 2015. 2. 16.

Takashi Nakamura ゼータ関数の k 回微分の零点について, 保型形式および関連するゼータ関数の研究, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2014. 1.23.

Takashi Nakamura, A modified Riemann zeta distribution in the critical strip, International Conference on Number Theory dedicated to the 65th birthday of Professor Antanas Laurincikas, Siauliai (Lithuania), 2013. 9.10.

Takashi Nakamura, Zeta distributions and quasi-infinite divisibility, Palanga Conference in Combinatorics and Number Theory, Palanga (Lithuania), 2013, 9.5.

Takashi Nakamura, Multidimensional zeta distributions and infinite divisibility, 解析的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2012. 10.31.

Takashi Nakamura, Zeros of Epstein zeta-functions, 国際研究集会 ゼータ関数 2012, 東京工業大学大学大岡山キャンパス, (東京都目黒区) 2012. 9.24

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/takashinakamurazeta/home>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 隆 (NAKAMURA Takashi)

東京理科大学・理工学部・教養・講師

研究者番号：50532355

研究者番号：

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：