様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号： ８２７２３
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４７４００３３

研究課題名（和文）有限群や代数の指標の特殊関数としての位置付けとその応用

研究課題名（英文）Characters of groups and algebras as special functions and their applications

研究代表者
水川　裕司（Mizukawa, Hiroshi）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・その他部局等・准教授

研究者番号：６０５３１７６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：当研究では，指標の直交性から得られるいくつかの結果を得た．まず，ポーカーダイスゲームやエーレンフェストの壺などの確率モデルがが有限群の等質空間として実現できる場合に多変数クラウチャック多項式を用い，エルゴード性やカットオフの臨界時間を表現論手法で求めることが出来た．また，あるシューア関数の恒等式をアフィンリー環の基本表現論と対称関数の直交性を活用し証明し，表現論的な意味付けを完全に与えることが出来た．そして，（類）正則分割に関し和因子とその重複度の間の分割恒等式を与えた．

研究成果の概要（英文）：In this study, some results are obtained by using the orthogonality of group or algebra characters. First result is related to stochastic models called Poker-dice game and Ehrenfest's urn model. Their ergodic properties and cut-off phenomenons are analyzed by using representation theoretical method. Second result is a formula on certain algebraic relations of Schur functions. Some formulas are proved by the representation of an affine Lie algebra and the theory of the symmetric functions. Furthermore the representation theoretic meaning of these formulas is revealed. The last result is a combinatorial formula of (class) regular partitions. The relation between the product of all parts of the class regular partitions and that of multiplicities are given.

研究分野： 表現論

キーワード： 指標の理論　帯球関数

１．研究開始当初の背景

群の既約指標やゲルファントペアの帯球関数は直交性という著しい性質を持つ．また，更にこれらは行列表現のトレースや成分そのものとして実現されるため，表現がよく理解されている場合に具体的な関数としての表示を持つことがある．

古典的にはコンパクトリー群のなす対称空間上の調和解析によってルジャンドルの陪関数やヤコビ多項式といった特殊関数に群論的な意味付がなされるということが有名である．そして，これの類似が有限群の世界でも存し，上記の対称空間をなすリー群たちのワイル群たちのなすゲルファントペアを考えるとその帯球関数として，クラウチャック多項式やハーン多項式と言った選点型の直交多項式が得られることが１９７０年代後半から徐々に知られるようになった．ちょうどそれと時を同じくしてアスキーによってアスキー・ウイルソン多項式という４つのパラメーターをもつ q-超幾何多項式を頂点とし，古典的な直交関数全て含む形でそれぞれの退化関係を表した表が提出された．そして，大きな問題として，（有限）群由来の選点直交多項式はアスキースキームにカバーされるかという問題が坂内や伊藤といった群論の大家より提起され，８０年台にレナードがそれを肯定的に解決した．しかし，逆に群由来のものがアスキースキームをカバーするか，とか多変数の直交多項式との関連はどうか，と言った問題が残った．９０年台に入ると量子群の研究によって再び，アスキースキームに現れる多項式たちが量子対称空間を住処とする者達であることが解明され，また多変数直交多項式であるマクドナルド多項式との深い関係も明らかになった．有限群のサイドからも，有限体上の線形群のゲルファンドペアとマクドナルド多項式の関係が調べられ，特に坂内－川中－ソンによって大きな成果がもたらされた．また，２０００年台になると，当研究代表らの研究によって有限群の環積たちのなすゲルファンドペアから多変数超幾何関数の一つである青本－ゲルファントの超幾何関数型の直交多項式が得られることがわかった．

また，８０年頃からゲルファントペアが様々な確率モデルを実現していることがダイアコニスらによって指摘され，それらの確率論とのかかわり合いが研究されるようになった．例えば，「トランプのカードを何回ほど切れば十分に混ざるか？」という問題は５３次の対称群上のランダムウォークを考えることに他ならないわけであるし，他にもエーレンフェストの壺のモデルという，古典物理学における気体の移動の離散モデルをあるワイル群同士のゲルファントペアとして実現することが出来る．そして，これらの確率モデルはマルコフ過程をなし，その際，帯球関数が確率行列のスペクトル分解を与える役割を果たし，確率過程の計算を可能にする．そしてダイアコニスはこれらの確率過程の混合時間におけるカットオフの存在などを巧妙に示した．

２．研究の目的

本研究の目的は，有限群由来の直交関数に注目しそれらの性質の解明や数学的な位置付けを明らかにすることである．そして，この研究では有限群やそこから派生した代数を扱い，どのような特殊関数が生ずるのか？また，それらがどのように数学の理論の中で活かされるのかを見ること，一変数の直交多項式の理論であったような出来事を多変数においても再び見ること，そしてこれらの群の理論が他の分野への結びつきを見出し発展へとつながることを目的とした．

はじめに見たように，表現論を通じた特殊関数論は古典的にも常に中心的な話題である．対称空間を始めとした等質空間は古くから幾何学的，解析学的に重要であり，様々な分野の発展に寄与してきた．そして，当研究で扱う有限群の場合は連続性は失うが，その代わり離散の世界との深いかかわり合いを見せてくれる．従い，ここでは有限群のなす等質空間を離散等質空間と呼ぶことにする．この離散等質空間を研究することの大きな魅力は，ダイアコニス流の確率空間としての理解を通じて物理のモデルの深い理解を導いたりできることであり，群論や表現論が今までもそうであったように多くの分野に羽ばたいていく可能性を持っていることである．

また，もう一つの側面として，有限群やリー理論由来の様々な対象はしばしば，面白い組合せ論を呼びこむ．指標の直交性などを駆使することは，整数の分割に関することなど，組合せ論の公式などを証明するのに大変有用である．したがって，指標の直交性が有効に機能するような組合せ論への寄与もひとつの目的である．

３．研究の方法

当研究は群論的手法とリー理論由来の組合せ論的手法を主な手段として研究を進める．表現を具体的に扱うために最も良い状況は実現がわかっていることである．例えば，ゲルファントペアを扱う際，帯球関数を計算するために幾つか方法が考えられるが，実現を用いれば，不変元を具体的に書き下し，群作用で不偏な内積を定義してやることで見通しが大変良くなる．そして，環積などは実現がよくわかっており，さらに有木-小池代数のような岩堀ヘッケ環の拡張に対してもある程度よい実現が知られているため，この方向の拡張も可能になるはずである．

また，等質空間を確率空間として見なすにはこの実現が欠かせない．もちろん抽象的な

離散等質空間の抽象的な確率論的解析，というものも考えることができるが，これは群論的にはそれほど目新しくはなく，それをやるより具体的なモデルを与えるべきと考える．
　また，指標由来の直交性を有効に用い様々な理論に適用したい．とくに，対称群のモジュラー表現にまつわる指標の問題に対しても例えば，ホール-リトルウッド多項式などを通じての何らかの理解を行う．

４．研究成果

(1) ポーカーダイスゲームの群論的解釈.

多変数クラウチャック多項式は一変数離散直交多項式の一つであるクラウチャック多項式の多変数化による一般化である．グリュエンバウムとラーマンはこれを用いポーカーダイスゲームと呼ばれる確率モデルの推移行列の計算を行った.

ポーカーダイスゲームとは簡単に説明すると，５つのトランプの図柄の描かれたサイコロを振り，ポーカーをするというものである.ただしサイコロは二回降ることが出来る，２回目は始めに出た中から，任意の出目を残して残りのサイコロを振り直す，その結果できた役によって勝負をする.
 下記の〔雑誌論文〕の③，および,〔学会発表〕の⑦では，彼らの考えた確率空間に複素鏡映群の作用を入れてやることで，これが複素鏡映群とその部分群である対称群の等質空間になっていることを示した.
 一般に(G,H)を有限群のなすゲルファントペアとした時，環積のペア$(G \text{ wr } S_n, H \text{ wr } S_n)$もゲルファントペアである．そして，この帯球関数は多変数クラウチャック多項式で与えられることが知られている．つまり，これは何故，グリュエンバウムとラーマンの研究に多変数クラウチャック多項式が有効に使われているのかを明らかにしたということである．このように代数構造が明らかになることによって，ラーマン達の解析的手法では見えなかった群作用による一般化などの道筋も見えることになったといえる.

(2) アフィンリー環$A_2^{(2)}$由来のシューア関数達の恒等式.

アフィンリー環$A_2^{(2)}$の基本表現の実現としてフェルミオンの空間で実現したものとボゾンの空間で実現したものを考える．この２つの空間の間の同型対応としてボゾン-フェルミオン対応と呼ばれるものが知られている.フェルミオンによる実現において極大ウエイトと呼ばれる基本表現のウエイトは 3 バーコアと呼ばれるヤング図形でパラメトライズすることが出来る.
　この極大ウエイトに$A_2^{(2)}$のシュバレー生成元 f_i (i=0,1)を１回作用させたものをウエイト空間の基底で展開したものを考える．すると，それらは３バーコアにあるルールで１個のマス目を加えたヤング図形でパラメトライズされるウエイト達の一次結合で与えられることがわかる．一方で，ボゾンの空間において極大ウエイトにシュバレー生成元 f_i (i=0,1)を 1 回作用させたものは頂点作用素を繰り返し施し，留数を計算することで得られる．このようにして２通りに計算されたベクトルをボゾン・フェルミオン対応でつなげてやることにより，シューア関数とシューアの Q-関数たちの関係式を導くことが出来た.これは，以前に水川と山田によって得られたシューア関数の公式を含み，それのアフィンリー環の表現論との関係を明確に出来たとも言える．また，台形型のヤング図形でパラメトライズされるシューアの Q-関数を 2-被約シューア関数で記述する公式も同時に得られた.

この仕事はもともとアフィンリー環の表現論と対称群のモジュラー表現の類似に端を発している．そこに対称関数の理論を適用し,その直交性をフルに利用することで結果を得た．今後はこの仕事をなお発展させることで，類似以上の関係を発見できることを願っている．なお，これらのことは下記の〔雑誌論文〕の①，②，および,〔学会発表〕の③，④で発表している.

 (3) エーレンフェストの壷モデルの群論的拡張.

エーレンフェストの壷モデルとは，２つの壷の中に n 個のボールが入っており，一単位時間毎に一つのボールが取り出され，再びどちらかの壷に入れられる，というボールの拡散の状態を記述した確率モデルである.
 ダイアコニスはこのモデルの各状態を B 型ワイル群をその部分群である対称群で割って作られる
離散等質空間の元とみなせることに気づき，群論的手法によってこの確率過程を解析した．その際確率収束の様子をみると，カットオフが起きていることにも気がついた．カットオフとは簡単に言うと臨界時間の前後で，劇的に拡散の様子が変わる現象の総称である．これの単純な一般化として壷を複数個 (r 個) にする，というものがすぐに考えられるだろう．これをダイアコニス流に群論的に解釈できるか，と言う問には洞がこの場合はゲルファントペア$(S_r \text{ wr } S_n, S_{r-1} \text{wr } S_n)$を考えれば良いという解答を与えた.
 洞の場合は取り出されたボールは
任意の壷に移動できる，という壷の間の相互作用が全くないモデルである．では例えば壷が輪状に並んでおり，取り出されたボールは隣にある壷にのみ移動できる，という制限を与えたらどうなるのか？これの群論的解釈はあるだろうか？ということを考え，研究し

た．その結果有限群のゲルファントペア(G,H)に対して，$(G \text{ wr } S_n, H \text{ wr } S_n)$を考えてやると，これは|G/H|個の壺と n 個のボールのモデルと解釈が可能であり，ボールの行き先をＧの作用によってコントロールできることがわかった．前述の疑問に対してなら右隣のみに移動できるようなモデルを考えたいなら，G を r 次の巡回群，H を単位元からなる自明な部分群とすればよいし，両隣に移動できるようなモデルなら G を二面体群，H を位数２の元が生成する部分群，としてやれば良い．さらに解析を進めることで，カットオフが起きるような場合を幾つか見つけることが出来た．

この研究では群作用によって，壺の間に相互作用を与えることで，古典物理のモデルであるエーレンフェストの壺モデルをより，深くさら理解できるようになったといえる．つまり，多く存在する数学と物理学の良い関係をまたひとつ増やすことが出来た．さらに今後はカットオフの起きる・起きないに関するゲルファントペアの分類問題なども考えることが出来，数学的にも興味深い．なお，これらのことに関して５の〔雑誌論文〕③〔学会発表〕⑤で発表している．

(4)　正則分割の組合せ論

対称群のモジュラー表現をパラメトライズするのは r-正則表現と呼ばれるクラスの分割である．また，r-類正則と呼ばれるクラスの分割が，r'-元の共役類をパラメトライズする．

ジェームスが彼の教科書の中で，対称群の通常指標表の行列式が分割の和因子の積で表されることに注意している．オルソンはこれを r-正則分割の言葉で一般化した．この中で，面白いのは n の全 r-類正則分割の和因子の重複度の積が和因子の積の定数倍になっていることである．このことを岡山大学の山田裕史と一般化した．具体的には，m 個の正整数の組で，ただしどの２つも互いに素，となっているようなものを一つ固定し，それらの整数で和因子が割れないような分割の全体を考えると，オルソンの場合の素直な一般化になっている，ということである．さらにこの組合せ論的な意味をグレイシャー写像によって明らかにしている．この際，２つの積の商として出てくる定数はカルタン行列の行列式の一般化にもなっており，これを発端にモジュラー表現の組合せ論的側面が明らかになることを期待している．なお，これらのことに関して５〔学会発表〕①，②で発表している．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計　３件)

① 水川裕司-中島達洋-山田裕史,
``アフィンリー環$A_2^{(2)}$の基本表現から生ずるシューア関数たちの恒等式",
数理解析研究所講究録, 1945, (2015), 115--124 (査読無).

② Hiroshi Mizukawa, Tastuhiro Nakajima, Ryoji Seno and Hiro-Fumi Yamada,
``Schur function identities arising from the basic representation of $A_2^{(2)}$"
Letters in Mathematical Physics, 104, (2014), 1317--1331 (査読有).

③ 水川 裕司,
``Poker dice game and Multivariate Krawtchouk polynomials",
数理解析研究所講究録, 1870, (2013), 16--24 (査読無).

〔学会発表〕(計　７件)

①水川裕司-山田裕史,
RIMS 研究集会「r-正則分割の組合せ論」, 組合せ論的表現論と表現論的組合せ論, 2014 年 10 月 30 日, 京都大学(京都府・京都市)

②水川裕司-山田裕史,
分割恒等式と対称群の指標表, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学 (広島県・東広島市)

③水川裕司-中島達洋-山田裕史,
Schur function identities arising from the basic representation of $A_2^{(2)}$,
RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の展望」, 2013 年 10 月 11 日, 京都大学 (京都府・京都市)

④水川裕司-中島達洋-山田裕史, $A_2^{(2)}$の基本表現から生ずるシューア関数たちの恒等式, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 25 日, 愛媛大学 (愛媛県・愛媛市)

⑤ 水川裕司, Interactions between Ehrenfest's urns arising from Group Actions, International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects, 2013 年 8 月 7 日, 北海道大学 (北海道・札幌市).

⑥ 水川裕司, Poker dice game and Multivariate Krawtchouk Polynomials, RIMS 研究集会「組合せ論的表現論と関連する話題」, 2012 年 10 月 09 日, 京都大学 (京都府・京都市)

⑦ 水川裕司, Multivariate Krawtchouk Polynomials, Forum on Probability, Statistics, Algebra and Combinatorics, 2012年7月 29日, 名古屋大学（愛知県・名古屋市）

６．研究組織

(1) 研究代表者

水川　裕司　（Mizukawa Hiroshi）

防衛大学校・総合教育学群・准教授
研究者番号：６０５３１７６２