様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号： １３９０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４７４００４２

研究課題名（和文） 曲率次元条件下における等周不等式と測度の集中現象の解析

研究課題名（英文） Relation between measure concentration inequality and isoperimetric inequality under the curvature dimension condition

研究代表者

高津　飛鳥（Asuka, TAKATSU）

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：９０６２３５５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：ガウス測度を正数上の正値連続非減少関数φを用いて一般化して得られるφ-ガウス測度を考察した.ここでφが恒等関数ならばφ-ガウス測度はガウス測度を,0<q<2,q≠1に対しφが指数qの冪関数ならばφ-ガウス測度はq-ガウス測度と呼ばれる冪分布となる.
q-ガウス測度やガウス測度の理論がφ-ガウス測度を扱う際に模範となることが分かったので,q-ガウス測度をモデルとする理論を展開する際に適切な条件を太田慎一氏との共著論文において明らかにした.またこの条件を用いて重付き多様体上の測度に対する解析,例えば輸送不等式をはじめとする関数不等式,距離と測度の関係を描く集中不等式,勾配流に関する考察を与えた.

研究成果の概要（英文）：I investigated \phi-Gaussian measures, which is obtained by generalizing the Gaussian measure via a positive continuous non-decreasing function \phi on the positive half line. If \phi is the identity function then the \phi-Gaussian measure recovers the Gaussian measure,and in the case that \phi is the power function with exponent q which lies in (0,1) or (1,2), the \phi-Gaussian measure is a power distribution, so-called the q-Gaussian measure.
In the joint work with Shin-ichi Ohta, we provided a useful condition to we analyze a metric measure space based on the theory of the q- Gaussian measure. By using this condition, we obtained analytic/geometric results such as a set of functional inequalities (e.g. a transport inequality), the concentration of measure phenomenon (which describes a relation between volume and distance) and the gradient flow of the \phi-divergence on the Wasserstein space.

研究分野： 幾何解析

キーワード： 測度距離空間　最適輸送理論　情報幾何　測度の集中減少　等周不等式

1．研究開始当初の背景

リーマン幾何において曲率は局所的にリーマン計量を定める最も基本的な不変量であり, 中でも断面曲率は距離関数の振舞を制御し, 断面曲率の和として表されるリッチ曲率は次元と併せて距離球の体積の挙動を制御する．よってリーマン多様体上で幾何構造の基礎概念である“距離”と“測度”に関係する解析, 例えば等周不等式や測度の集中不等式の考察にリッチ曲率は本質的な役割を果たすので, リッチ曲率の概念を微分構造を許容しない距離空間上の測度に対して拡張出来ればその上の“距離”と“測度”に関係する解析に有益であることが見込まれる．

以上の背景の下に, 近年, J. Lott&C. Villani [1] と K.-T. Sturm [2] は測度距離空間に対し“リッチ曲率の下限・次元の上限”をワッサーシュタイン幾何を用いて定式化した．ここで測度距離空間とは任意の二点が最短線で結ばれる完備可分距離空間とその上のボレル測度の組である．このボレル測度のことを参照測度と呼ぶ．またワッサーシュタイン幾何とは完備可分距離空間上の確率測度のなす空間上の距離の幾何で, ワッサーシュタイン距離関数は完備可分距離空間上の最小化問題の値として定まり, 元の距離構造と密接に関係する．Lott&Villani, Sturm らが定義した意味で測度距離空間の“リッチ曲率が K 以上・次元が N 以下”であることを測度距離空間は曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たすという．ここで曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,N)$ は $K\in\mathbb{R}$, $N\in(1,\infty]$ に対して, エントロピー汎関数のワッサーシュタイン空間上における凸性を用いて定義される．特に最短線が分岐しない測度距離空間が $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たすことは, 参照測度に対するボルツマンエントロピーの任意のワッサーシュタイン最短線に沿った K-凸性に等しい．そして $\mathrm{CD}(0,N)$ を満たすことは, 参照測度に対する q_N-ツァリスエントロピーの任意のワッサーシュタイン最短線に沿った凸性に等しい．但し $q_N := (N+1/N)$ である．ここで距離空間上の関数の K-凸性はユークリッド空間上の関数のヘッシアンの最小固有値が一様に K 以上であることの一般化である．また q-ツァリスエントロピーは, ボルツマンエントロピーを情報幾何の概念を用いて一般化した冪分布に適するエントロピーである． ここで情報幾何は 1980 年代に S. Amari が提唱したパラメーターを持つ確率測度空間の幾何構造であり, この幾何学構造を用いた解析手法は統計学・量子物理学・情報理論などに応用される．情報幾何では幾何構造として特に情報計量と呼ばれるリーマン計量とその計量に関して直交する二つの接続を取り扱う．そして確率測度のなす空間上の情報幾何によって導出される幾何構造とワッサーシュタイン幾何構造は大きく異なり, 両者は独立独歩にその発展を進めきた．しかしワッサーシュタイン空間上の勾配流を考える際に, 情報幾何の概念を用いると理論の筋道が明確になり, また両者は輸送不等式を介して相関関係があることが分かってきた．さらに輸送不等式は測度の集中現象と呼ばれる測度と距離の関係を描く不等式を導く．

そこで情報幾何とワッサーシュタイン幾何を融合させることで, 測度距離空間上の幾何解析に新展開が齎されることが期待される．

文献表

[1] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, Ann. of Math. **169** (2009), 903–991.

[2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I,II, Acta Math. **196** (2006), 65–131, 133–177.

2．研究の目的

本研究の目的は確率測度のなす空間上の二つの異なる幾何, ワッサーシュタイン幾何と情報幾何を用いて測度距離空間上の幾何構造, 特に“距離”と“測度”の関係を解析することである．具体的には距離関数と有限測度の関係を表す二つの評価, 等周不等式と測度の集中不等式の関連を曲率次元条件を用いて考察する． ここで等周不等式は集合の周長を集合の測度による関数で下から評価する不等式, 測度の集中不等式は測度が全測度の半分以上である集合の近傍測度を集合からの距離で下から評価する不等式である． 形式的には集合の近傍測度は集合の周長の積分と見なせるので, 等周不等式を積分することで測度の集中不等式が得られる．よって一般には等周不等式は測度の集中不等式より強い評価だが, ある実数 K に対して曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす重付き多様体上では等周不等式と測度の集中不等式が漸近的に同値になることが E. Milman [1] によって示されていた．ここで重付き多様体とは完備リーマン多様体とその上のリーマン距離関数, そしてリーマ

ン測度に同値なボレル測度のなす測度距離空間のことである．そこで他の曲率次元条件下において等周不等式と測度の集中不等式の関係, 特に同値であるかどうかをワッサーシュタイン幾何と情報幾何を用いて考察する．

また前述のように確率測度のなす空間上の情報幾何構造とワッサーシュタイン幾何構造は大きく異なる．例えば実数上のガウス測度族は上半平面に同相であり, 情報計量に関しては双曲計量に等長的だがワッサーシュタイン距離に関してはユークリッド距離に等長的である．しかし情報幾何では二つの確率測度の差異を情報計量から導かれるリーマン距離関数ではなくダイバージェンスを用いて計ることが多い．ここでダイバージェンスは情報計量に直交する二つの接続から定まり, 対称性は満たさないがあるピタゴラスの定理を満たすので距離関数の二乗のように振舞うとみなされる．そしてダイバージェンスのワッサーシュタイン空間における K-凸性はダイバージェンスの平方根とワッサーシュタイン距離関数を比較する輸送不等式を導く．このようにして二つの幾何は大きく異なるが相関関係があるので, 両幾何を用いた測度距離空間の考察を深めることでその関連性をより精緻に描写すること目指す．

文献表

[1] E. Milman, Isoperimetric and Concentration Inequalities: Equivalence under Curvature Lower Bound, Duke Math. J. **154**(2010), 207–239.

3. 研究の方法

確率測度空間上の二つの異なる幾何, ワッサーシュタイン幾何と情報幾何を用いて測度距離空間上の解析を進める．特に情報幾何としてボルツマンエントロピーに附随する理論を正数上の正値連続非減少関数 φ を用いて一般化する φ-情報幾何を用いる．ここで φ が恒等関数ならばボルツマンエントロピーに附随する理論を復元し, $0 < q < 2$ かつ $q \neq 1$ に対し, φ が指数 q の冪関数の場合は q-ツァリスエントロピーに附随する理論に対応する．そして最短線が分岐しない測度距離空間において参照測度に対するボルツマンエントロピーのワッサーシュタイン空間における K-凸性と曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,\infty)$ は同値であり, n 次元標準ガウス空間はその次元 n に依らず常に $\mathrm{CD}(1,\infty)$ を満たす．ここで n 次元標準ガウス空間とは n 次元ユークリッド空間とその上のユークリッド距離関数および n 次元ユークリッド空間上の標準ガウス測度のなす測度距離空間である．さらにガウス測度は平均と分散に依る束縛条件下でルベーグ測度に対するボルツマンエントロピーを最小化する確率測度である．また標準ガウス測度に対するボルツマンエントロピーはルベーグ測度に対するボルツマンエントロピーと位置エネルギーの和として表される標準ガウス測度に対する相対エンロトピーとなる．さらにこの相対エンロトピーはガウス測度族上の情報幾何構造から導かれるダイバージェンスであるカルバック・ライブラダイバージェンスに一致する．同様に $q_N = (N+1)/N$ ならば, 最短線が分岐しない測度距離空間において参照測度に対する q_N-ツァリスエントロピーのワッサーシュタイン空間における凸性と曲率次元条件 $\mathrm{CD}(0,N)$ は同値である．そして平均と分散に依る束縛条件下でルベーグ測度に対する q-ツァリスエントロピーを最小化する確率測度は q-ガウス測度と呼ばれる冪分布である．しかし n 次元ユークリッド空間とその上のユークリッド距離関数および n 次元ユークリッド空間上の q-ガウス測度のなす測度距離空間は $q > 1$ ならば, いかなる $K > 0, N > 0$ に対しても曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たさない．そこで q_N-ガウス測度に適した条件を考え, その条件を用いた測度距離空間上の解析を展開する．

4. 研究成果

発表論文 [3] において, ガウス測度を φ-情報幾何を用いて一般化した φ-ガウス測度の性質を調べ, ワッサーシュタイン幾何を使うことで φ-ガウス測度における q-ガウス測度およびガウス測度の特殊性を示した．またこの論文により, ワッサーシュタイン幾何と情報幾何の差異に対する新しい描写を得た．

太田慎一氏との共著である発表論文 [2] において, q_N-ガウス測度に適した条件を導いた．この考察の際に我々は q_N-ガウス測度空間を解析するのではなく, q_N-ガウス測度をユークリッド空間とその上のユークリッド距離関数およびルベーグ測度のなす測度距離空間上の測度として考察する．すなわち測度距離空間とその上の測度がなす三組を考える．(参照測度と区別するために測度距離空間上の測度のことを基本測

度と呼ぶ.) すると q_N-ガウス測度に適した条件は “測度距離空間が曲率次元条件 $\mathrm{CD}(0,N)$ を満たすことおよび基本測度の密度関数の q_N-対数 K-凹性” となる. ここで φ-対数関数は φ-情報幾何を用いて対数関数を一般化した物で, q-対数関数は φ が指数 q の冪関数であるときに対応する対数関数である. 同様にして q-指数関数も定義される. 我々は情報幾何を用いて N の定義域を $(1,\infty]$ から $(-\infty-1]\cup(1,\infty]$ に拡張し, そしてこの条件を用いて重付き多様体上の基本測度に対する考察を与えた. 特にカルバック・ライブラダイバージェンスを φ-情報幾何を用いて一般化した φ-ダイバージェンスとワッサーシュタイン距離関数を比較する輸送式や, それから導かれる測度の集中不等式を得た. また $q<1$ のとき, q-ガウス測度（およびある種の動径な確率測度）に対する等周不等式を発表論文 [4] で得た. だが一方で本研究の大きな目的であった “測度距離空間が曲率次元条件 $\mathrm{CD}(0,N)$ を満たすことおよび基本測度の密度関数の q_N-対数 K-凹性” という条件下における等周不等式と測度の集中不等式の関係は究明できなかった. 解析が思うように進まなかった理由の一つは, $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間の結果の多くが指数関数は満たすが q-指数関数は満たさない性質に大きく依存しているため, $\mathrm{CD}(K,\infty)$ を満たす測度距離空間に対する既存の結果を有限の N に対し $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たす測度距離空間に拡張することができなかったことに依る.

しかし近年, Milman [3,4] や F. Cavalletti&A. Mondino [1,2] により, 有限の N に対し $\mathrm{CD}(K,N)$ を満たす (そしてある種の線型構造を許容する) 測度距離空間上の幾何構造の解析がに大きな進展が与えられた. そこで今後, これらの結果を加味した測度距離空間上の測度に対する考察を進めたい.

文献表

[1] F. Cavalletti and A. Mondino, Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds, preprint(2015). Available at arXiv:1502.06465

[2] F. Cavalletti and A. Mondino, Sharp geometric and functional inequalities in metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds, preprint(2015). arXiv:1505.02061

[3] E. Milman, Sharp Isoperimetric Inequalities and Model Spaces for Curvature-Dimension-Diameter Condition, Journ. Europ. Math. Soc. (to appear).

[4] E. Milman, Beyond traditional Curvature-Dimension I: new model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension, preprint (2014). Available at arXiv:1409.4109

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(4 件)

[1] Asuka TAKATSU, Takumi YOKOTA: Cone structure of L^2-Wasserstein geometry, Journal of Topology and Analysis, 査読有, **04**(2012), 237–253. DOI: 10.1142/S1793525312500112

[2] Shin-ichi OHTA, Asuka TAKATSU: Displacement convexity of generalized relative entropies. II, Communications in Analysis and Geometry, 査読有, **21**(2013), 687–785. DOI: http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2013.v21.n4.a1

[3] Asuka TAKATSU: Behaviors of φ-Exponential Distributions in Wasserstein Geometry and an Evolution Equation, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 査読有, , **45**(2013), 2546–2556. DOI:10.1137/110849304

[4] Asuka TAKATSU: Isoperimetric inequality for radial probability measures on Euclidean spaces Journal of Functional Analysis, 査読有, **266**(2014), 3435–3454. DOI:10.1016/j.jfa.2014.01.014

【学会発表】(10 件)

[1] Asuka TAKATSU: Displacement convexity of generalized relative entropy, The Fourth Geometry Meeting dedicated to the centenary of A.D.Alexandrov, 2012/08/23, The Euler International Mathematical Institute(Saint Petersburg, Russia).

[2] Asuka TAKATSU: Isoperimetric problem for radial probability measures, 確率論と幾何学, 2012/10/20, 大学コンソーシアム

やまがたゆうキャンパス・ステーション (山形県, 山形市)

[3] Asuka TAKATSU: Isoperimetric problem for radial probability measures, 低次元多様体モジュライ空間の幾何学, 2012/10/31, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市)

[4] 高津　飛鳥: 最適輸送理論を廻る話, 若者のための現代幾何入門,2013/06/08, 大阪大学 (大阪府, 豊中市)

[5] 高津　飛鳥: 輸送不等式と測度の集中現象, 第 60 回幾何学シンポジウム, 2013/08/26, 東京工業大学 (東京都, 目黒区)

[6] 高津　飛鳥: Some evolution equations as ワッサーシュタイン gradient flows, 偏微分方程式の幾何, 2013/11/21, 京都大学数理解析研究所 (京都府, 京都市)

[7] 高津　飛鳥: ワッサーシュタイン/Information geometric aspect of some evolution equations, 第 6 回東北楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2014/1/13, 東北大学 (宮城県, 仙台市)

[8] Asuka TAKATSU: Isoperimetric inequality for radial probability measure on Euclidean spaces, Rigidity Seminar, 2014/02/17, 名古屋大学 (愛知県, 名古屋市)

[9] 高津　飛鳥: ワッサーシュタイン幾何と φ-正規分布族, 第 17 回情報論的学習理論ワークショップ, 2014/10/18, 名古屋大学 (愛知県, 名古屋市)

[10] 高津　飛鳥: エントロピーとワッサーシュタイン幾何, 第 63 回 Encounter with Mathematics, 2015/02/20, 中央大学 (東京都, 文京区)

【その他】ホームページ等
https://sites.google.com/site/asukatakatsu/

6．研究組織

(1) 研究代表者

高津　飛鳥 (TAKATSU, Asuka)
名古屋大学大学院　多元数理科学科　助教
研究者番号：90623554

(2) 研究分担者, 連携研究者, 研究協力者
該当無し