

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740044

研究課題名(和文) ガウス写像の性質に基づく曲面の大域的性質の研究

研究課題名(英文) A study on the relationship between the global property of immersed surfaces in space forms and the behavior of their Gauss maps

研究代表者

川上 裕 (Kawakami, Yu)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：60532356

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ユークリッド空間内の極小曲面や3次元アフィン空間内の非固有アフィン球面，3次元双曲型空間内の平坦曲面といったさまざまな曲面のクラスにおけるガウス写像の函数論的性質の幾何学的意味を明らかにした。特に，開リーマン面上のある等角計量のガウス曲率の評価を与え，その応用として，完備性を満たすときのこれらの曲面のガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We elucidated the geometric background of function-theoretic properties for the Gauss maps of several classes of immersed surfaces in three-dimensional space forms, for example, minimal surfaces in Euclidean three-space, improper affine spheres in the affine three-space and flat surfaces in hyperbolic three-space. In particular, we give an effective curvature bound for a specified conformal metric on an open Riemann surface. As an application of the result, we revealed the geometric meaning of the maximal number of exceptional values of Gauss maps for these surfaces.

研究分野：幾何学

キーワード：幾何学 函数論 曲面論 値分布論 ガウス写像 波面(フロント) 除外値 一意性定理

### 1. 研究開始当初の背景

曲率条件をもつ空間内の曲面は、現実社会の物理的現象としてあらわれるものの数学的モデルとなっていることが多い。例えば、平均曲率が恒等的に零の曲面である極小曲面は石鹸膜、平均曲率が一定の曲面はシャボン玉の数学的モデルとなっている。このような事情から、曲率条件をもつ3次元空間内の曲面の性質を調べる研究は古くから活発に研究されている。しかし、一般に曲面の大域的性質を調べることは非常に難しい。一方、ユークリッド空間内の極小曲面論においては、ガウス写像の値分布論的性質に基づいて大域的性質を調べる研究が存在する。その研究における重要な問題として「完備極小曲面のガウス写像の除外値問題」があり、いくつかの先行研究があるが、まだ解明されていない事実もいくつか存在する。例えば、有限全曲率完備極小曲面のガウス写像の除外値数の上限を求める問題やこれまで知られている値分布論的性質の結果の幾何学的背景などである。また、この研究が他の3次元空間内の曲面においても有効であるかどうかもこれまでわかっていなかった。

### 2. 研究の目的

前節でも述べたように、曲面の大域的性質を調べることは非常に難しいが、極小曲面論における「ベルンシュタインの定理」と「リュールビルの定理」との関係のように、ガウス写像の性質に基づいて調べることで、曲面の大域的性質が幾何学的に理解しやすい状況で導くことができることがある。本研究では、ガウス写像の性質と空間内の曲面の大域的性質との関係を明らかにし、曲面の大域的性質を調べる新しい理論を構築することを目的としている。

### 3. 研究の方法

まず、3次元双曲型空間内の平坦波面の標準形式の比の値分布論的性質を調べた。以前の報告者たちの研究において、平坦波面が弱完備な場合、標準形式の比の除外値数が高々“3”となることは証明できていたので、その拡張にあたる分岐定理を調べ、さらにその結果とベルンシュタイン型の定理やアールフォルスの意味での島の数の評価といった結果との対応について考察した。次に、これまで得られた曲面のガウス写像の除外値数の上限の幾何学的な統一的解釈を調べた。3次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像の除外値数の上限は、藤本坦孝氏により“4”であることが示されている。その“4”の幾何学的解釈は“ $4 = 2 + 2$ ”と考え、一方は、ガウス写像の値域であるリーマン球面のオイラー標数で、もう一方は曲率から生じる数であることはすでに知られていた。一方、報告者たちは、3次元アフィン空間内の弱完備な非固有アフィン波面のラグランジアンガウス写像や先も挙げた

3次元双曲型空間内の弱完備な平坦波面の標準形式の比の除外値数の上限は“3”であることを示した。そこでこの“3”の幾何学的解釈を考えたが、極小曲面のときに述べた幾何学的解釈にある「曲率から生じる数」という点がそれ以上理解されておらず、これら2つの結果の関係がはっきりとわかっていなかった。これらの曲面の等角計量に着目し研究を行った。さらに、その幾何学的解釈を与えれば、「分岐定理」や「一意性定理」といった他のガウス写像の値分布論的性質にも幾何学的解釈を与えることができ、ガウス写像の値分布論的性質の1つの統一的解釈を得られるのではないかと考え研究を行った。

### 4. 研究成果

(1) 3次元双曲型空間内の平坦波面の標準形式の比を有理型関数として考え、その値分布論的性質を調べた。特に、弱完備性が成り立つ場合、分岐定理が成り立つことを示した。この結果の系として、除外値数の上限が“3”であることの再証明やこの関数に対するアールフォルスの意味での島の定理などを与えた。これらの結果から、「3次元双曲型空間において、特異点を許容しない完備な平坦曲面はホロ球面か双曲的円柱に限る」というベルンシュタイン型の定理が成り立つ背景を、値分布論の視点から理解することができた。これらの結果は【雑誌論文】で発表した。

(2) 複素平面上の非定数有理型関数の除外値数の上限“2”の幾何学的意味は、その値域であるリーマン球面のオイラー標数であることはよく知られている。一方、3次元ユークリッド空間内の完備極小曲面のガウス写像の除外値数の上限“4”や報告者たちが示した、3次元アフィン空間内の弱完備な非固有アフィン波面のラグランジアンガウス写像の除外値数の上限“3”の幾何学的意味ははっきりと分かっていなかった。そこで、報告者はこれら除外値数の上限を統一的に導くことができ、かつ幾何学的意味を明らかにするため、これらの曲面の等角計量に着目し、その計量のガウス曲率の評価を与えることができた。また、この結果の系として、その計量が完備な場合は、ガウス写像の除外値数の上限は(計量のオーダー) + (リーマン球面のオイラー標数)で与えられることを示した。このことから、これまで調べてきた曲面のクラスにおけるガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味や大域的性質の1つであるベルンシュタイン型の定理が生じる幾何学的背景などを明らかにすることができた。この結果は【学術論文】で発表し、学会や研究集会などで研究講演を行った。

(3) 研究成果(2)の結果を受けて、申請者は、ガウス写像の値分布論的性質の統一的解釈

を与えるため、次の2つの結果を得た。1つは、ガウス写像の分岐定理についてである。研究成果(2)の結果をさらに精密化して、ガウス写像の分岐の情報に伴う場合の曲率の評価を与えることができた。この結果により、完備性をもつ曲面のガウス写像の分岐定理の幾何学的意味を明らかにすることができ、さらにさまざまな曲面のクラスにおいて、ガウス写像のアルフォロスの意味での島の定理を得ることができた。もう1つは、ガウス写像の一意性定理についてである。複素平面上の有理型関数において、5つ以上の値が決まれば、関数は唯一つに決まるという「一意性定理」と呼ばれる結果がネバンリンナによって証明されている。その結果のガウス写像に対応する結果を証明することができた。この結果から、藤本坦孝氏が示した完備極小曲面のガウス写像の一意性定理に対応する結果や弱完備な非固有アフィン波面のラグランジアンガウス写像における対応する結果などを幾何学的意味が明らかな統一的方法で導くことができた。この結果は【学術論文】で発表し、研究成果(2)と合わせて、学会や国際研究会などで研究講演を行った。

(4) 本研究課題を実施している期間に、3次元球面内の極小曲面の研究において長年未解決であった問題が次々と解かれていった。その中で申請者は本研究課題と関連のある結果として、ウイلمア予想の解決を記したマルカスとネベスの論文を熟読し、その解説を【学術論文】や研究講演で発表した。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計5件)

Yu Kawakami, Function-theoretic properties for the Gauss maps for various classes of surfaces, *Canadian Journal of Mathematics*, 査読有, 掲載決定,  
<http://cms.math.ca/10.4153/CJM-2015-008-5>

Yu Kawakami, A ramification theorem for the ratio of canonical forms of flat surfaces in hyperbolic three-space, *Geometriae Dedicata*, 査読有, Vol. 171, Issue 1, 2014, pp. 387-396.  
DOI: 10.1007/s10711-013-9904-8

川上裕, Willmore 予想について, 山口大学数理学レクチャーノート, 査読無, No. 2, pp 41-52, 2013,  
<http://www.sci.yamaguchi-u.ac.jp/dep/math/LNMY>

S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada,

Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and spacelike CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics "Recent Trends in Lorentzian Geometry"*, 査読有, Vol. 26, 2013, pp. 1-48,  
DOI: 10.1007/978-1-4614-4897-6\_1

Yu Kawakami, On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, 査読有, Vol. 274, Issue 3-4, 2013, pp 1249-1260,  
DOI: 10.1007/s00209-012-1115-8

〔学会発表〕(計25件)

川上裕, 相山玲子, 芥川和雄, 複素2次元空間内の完備極小ラグランジアン曲面のガウス写像と全曲率の関係について, 2015年度日本数学会幾何学分会一般公演, 2015年3月21日, 明治大学(東京都千代田区)

川上裕, Osserman の不等式について, 第1回金沢・山口合同研究会, 2015年1月25日, 金沢大学(石川県金沢市)

川上裕, The Gauss map and total curvature of complete minimal Lagrangian surfaces in the complex two-space, 幾何学セミナー, 2014年12月18日, 東京工業大学(東京都目黒区)

川上裕, 完備極小曲面のガウス写像の除外値問題の研究の現状と展望, OCU48 セミナー, 2014年4月28日, 大阪市立大学(大阪府大阪市)

川上裕, 曲面のガウス写像の値分布, 金沢大学数理学談話会, 2014年4月23日, 金沢大学(石川県金沢市)

川上裕, 曲面のガウス写像の値分布, 2014年度日本数学会幾何学分会特別講演, 2014年3月15日, 学習院大学(東京都豊島区)

Yu Kawakami, Function-theoretic properties for the Gauss maps of various classes of surfaces, The 2nd Japanese-Spanish workshop on Differential Geometry, 2014年2月11日, 東京工業大学(東京都目黒区)

川上裕, 曲面のガウス写像の函数論的性質について, 微分幾何火曜セミナー, 2014年1月14日, 筑波大学(茨城県つくば市)

川上裕, 曲面のガウス写像の値分布論的

性質の幾何学的背景について，研究集会「多様体上の微分方程式」金沢シリーズ第12回，2013年11月22日，金沢大学（石川県金沢市）

川上裕，Willmore 予想について，セミナー，2013年11月15日，名古屋大学（愛知県名古屋市）

Yu Kawakami, On function-theoretic properties for Gauss maps of several classes of surfaces, 「リーマン面・不連続群論」研究集会，2013年11月10日，大阪大学（大阪府大阪市）

川上裕，曲面のガウス写像の値分布論的性質について，微分幾何学セミナー，2013年7月12日，大阪市立大学（大阪府大阪市）

川上裕，Willmore 予想とその解決法について，金沢大学数理学談話会，2013年5月15日，金沢大学（石川県金沢市）

川上裕，3次元球面内の曲面論の最近の進展について，九大幾何学セミナー，2013年4月19日，九州大学（福岡県福岡市）

Yu Kawakami, Overview of the proof of Willmore conjecture by Marques and Neves, Workshop on geometry and geometric analysis, 2013年3月15日，東北大学（宮城県仙台市）

川上裕，Willmore 予想について，研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」2013年2月14日・16日，山口県健康づくりセンター（山口県山口市）

川上裕，ガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について，幾何学セミナー，2013年2月4日，岡山大学（岡山県岡山市）

川上裕，ガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について，微分幾何火曜セミナー，2013年1月22日，筑波大学（茨城県つくば市）

川上裕，極小曲面の Gauss 写像の除外値問題について，熊本大学理学部数学専攻プロジェクトゼミナール（兼談話会），2012年12月18日，熊本大学（熊本県熊本市）

川上裕，ガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について，複素解析幾何セミナー，2012年12月3日，東京大学（東京都目黒区）

⑳ 川上裕，ガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について，第55回函数論シンポジウム，2012年11月24日，金沢大学（石川県金沢市）

㉑ 川上裕，ガウス写像の除外値数の最良の上限について，九大幾何学セミナー，2012年7月13日，九州大学（福岡県福岡市）

㉒ 川上裕，On the maximal number of exceptional values of Gauss map of minimal surfaces, 山口大複素解析ゼミ，2012年7月11日・25日，山口大学（山口県山口市）

㉓ 川上裕，様々な曲面のクラスにおけるガウス写像の除外値数の最良の上限について，幾何学セミナー，2012年6月15日，名古屋大学（愛知県名古屋市）

㉔ 川上裕，波面のガウス写像の値分布について，研究集会：特異点と幾何構造，2012年6月1日，長野市生涯学習センター（長野県長野市）

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

川上 裕 (KAWAKAMI, Yu)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：60532356