

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740046

研究課題名(和文) リッチ曲率に関わるリーマン多様体の崩壊の研究

研究課題名(英文) The study of collapsing Riemannian manifolds related to Ricci curvature

研究代表者

本多 正平 (Honda, Shouhei)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60574738

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：Ricci曲率が下に有界なRiemann多様体のGromov-Hausdorff極限空間の研究を関数解析的な手法により行った。具体的にはGromov-Hausdorff収束に関わる L_p 収束の概念などを導入し、それを用いて極限空間のある種の正則性を示したり、それらのRiemann幾何学への応用を与えた。

研究成果の概要(英文)：I studied the Gromov-Hausdorff limit space of a sequence of Riemannian manifolds with a lower Ricci curvature bound via functional analytic methods. In particular we introduce the notion of L_p -convergence with respect to the Gromov-Hausdorff convergence, prove regularities of limit spaces via the convergence theory, and give applications of them to Riemannian geometry.

研究分野：リーマン幾何学

キーワード：Ricci曲率

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初, Ricci 曲率に関わる Riemann 多様体の Gromov-Hausdorff 収束 (GH 収束と以下略す) の理論は, Cheeger-Colding の仕事の本質的に全てを占めていた. 彼らの仕事はそれだけ基本的なものであるが, 理解することの難しさも有名であった. それを広く普及し, さらに深化させ, 様々な分野へ応用させていくべきであるという認識があった. これが背景である.

2. 研究の目的

Ricci 曲率が下に有界な Riemann 多様体の GH 極限空間の正則性と, 極限空間と Riemann 多様体の関係を明らかにしていくことが目的である.

3. 研究の方法

実際に上で述べたことを実行することが目的であった. そのために, Cheeger-Colding 理論の最深部をさらに精密化して, それを基礎にし, 関数解析的な手法を GH 収束理論に持ち込むという方法をとった.

4. 研究成果

Ricci 曲率が下に有界な Riemann 多様体列の GH 極限空間上で, 角度がほとんどのケースで well-defined となることを示した. この 'ほとんど' は Colding-Naber の最近の仕事からシャープであることがわかる. また, それを用いて極限空間上に二階微分構造を導入し, その上で Levi-Civita 接続の一意的な存在を示した. これらを一つにまとめた論文が出版された.

次に, GH 収束に関するテンソル場の L_p 収束の概念とその基本的な性質を与えた. 応用として, 極限空間上で Hessian の項が生きている Bochner 型不等式を示した. この不等式がシャープであることは容易にわかる. また, Cheeger-Colding によって導入された Dirichlet Laplacian に対して, 上で与えた二階微分可能構造を用いた明示公式を証明することもできた. また, 別の応用として, p -Laplacian の正の第一固有値の GH 収束に関する連続性, 次元の下半連続性を示した. 特に, 接空間の次元は元の空間の次元より一般に大きくならないことを示した. この接空間の次元の評価は Cheeger-Colding によるある例によってシャープであることもわかる. 以上を一つにまとめた論文も出版された.

次に Cheeger 等周定数と p -Laplacian と GH 収束の関係を調べた. 粗く言って, p -Laplacian の正の第一固有値を $1/p$ 乗したものを考えるとき, それを $p - 1$ とすると Cheeger 等周定数が現れ, p とすると, 直径の逆数の 2 倍が表れることを示し, これの GH 版が概ね正しいことを示した. その系として p -Laplacian を用いた新しい等周不等式を得ることが出来た. その等周不等式は p によらないものであり, そのような p によらない評価はこれまで知られておらず, GH 収束理論を用いて初めて証明されたものである. 以上をまとめたものをプレプリントとして一つ

の論文にまとめ, arxiv に上げた. そして現在投稿中である.

次に種々の楕円型方程式の解の GH 収束での振る舞いを調べた. 具体的には Schrodinger 方程式, Poisson 方程式, 山辺方程式, Hodge Laplace 方程式を扱った. その研究の応用として, それらの方程式の解の新しい評価と, 先に述べた二階微分可能構造の一意性を証明した. これらを一つにまとめた論文はアクセプト済みで, 今後出版予定である.

次に Fano 多様体の GH 極限を二木昭人氏, 斎藤俊輔氏と共同で研究した. 具体的には, 重みつき Dolbeault 作用素のスペクトル収束と Weitzenbock 不等式を極限空間で示した. また, Fano-Ricci limit space という極限空間に関する概念を導入し, それに関わるコンパクト性定理を示した. それらの系としてコンパクト Fano 多様体上の正則ベクトル場からなる線形空間の次元は, 多様体の次元, 直径の上からの評価, 体積の下からの評価, Ricci 曲率の下からの評価, Ricci potential の下からの評価だけで, 上から押さえられることがわかった. また, Kahler-Ricci soliton との関係についても研究を行った. 以上を一つの論文にまとめて arxiv に上げ, 雑誌に投稿した.

最後に Ricci 曲率が上下から有界で, GH 極限空間が非崩壊という状況で研究を行った. 具体的にはまず, 1 形式に作用する Hodge Laplacian と全ての微分形式に作用する接続 Laplacian のスペクトル収束を証明した. 特にその系として第一ベッチ数の GH 収束に対する上半連続性を示すことができた. また, 上記スペクトル収束はシャープであることもわかった. すなわち, 2 形式以上の微分形式に作用する Hodge Laplacian についてはスペクトル収束が期待できないこともチェックした. また, そのような非崩壊極限空間に対する曲率の研究も行った. その様な空間では通常の方法では曲率が定義できないことが Peters によってわかっていた. そこで別の方法で自然な曲率テンソルが定義できることを示し, その存在と一意性を示した. もちろんそれは極限が滑らかな空間であれば通常のものとは一致する. これによって, Ricci テンソル, スカラー曲率が定義でき, しかもそれらは GH 収束に関する L_p 位相で連続に動くこともわかった. その系として, 10 年ほど前に Lott によって与えられたスカラー曲率の GH 収束での振る舞いについての問題を解くことができた. また, その Ricci テンソルの下限は最近大きな進展を見せている測度距離空間上の Ricci 曲率の下限の研究と両立していることもわかり, Ricci テンソル自身は最近 Gigli と Lott がそれぞれ独立に定義した Ricci 測度, と本質的に同じであることも示した. 以上を一つの論文にまとめて arxiv に上げ, 雑誌に投稿した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

1. S.Honda, On low dimensional Ricci limit spaces, Nagoya Math. J. 209 (2013), 1-22 (査読有り).
2. S.Honda, A weakly second order differential structure on rectifiable metric measure spaces, Geom. Topol. 18 (2014), 633-668 (査読有り).
3. S.Honda, L^p -spectral gap and Gromov-Hausdorff convergence. Real and complex submanifolds, 371-378, Springer Proc. Math. Stat., 106, Tokyo, 2014 (査読有り).
4. S.Honda, Harmonic functions on asymptotic cones with Euclidean volume growth. J. Math. Soc. Japan, 67 (2015), 69-126 (査読有り).
5. 本多正平, Ricci 曲率が有界な空間の構造, 数学, 67 (2015), 154-178 (査読有り).
6. S.Honda, Ricci curvature and L^p -convergence, J. Reine. Angew Math. 705 (2015), 85-154 (査読有り).
7. S.Honda, Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, arXiv:1410.3296v5, to appear in Mem. of the AMS (印刷中).

[学会発表](計 53 件)

1. S.Honda, Ricci curvature and angles, The Fourth Geometry Meeting dedicated to the centenary of A.D.Alexandrov (plenary talk), The St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, 2012/8/21
2. 本多正平, 多様体の崩壊極限における二階微分可能構造と Levi-Civita 接続の一意的な存在について, 幾何学シンポジウム基調講演, 九州大学, 2012/8/30
3. 本多正平, リッチ曲率と L^p 収束, 談話会, 京都大学, 2013/7/3
4. S.Honda, Ricci curvature and L^p -convergence, Geometry and probability, Kyoto University, 2013/8/9
5. S.Honda, Ricci curvature and

L^p -convergence, The London Geometry and topology seminar, Imperial College of London, 2013/8/20

6. S.Honda, Ricci curvature and L^p -convergence, 第 9 回日中友好幾何学シンポジウム, 北海道大学, 2013/9/4
7. 本多正平, Cheeger 等周定数と p -Laplacian と Gromov-Hausdorff 収束, 談話会, 室蘭工業大学, 2014/7/4
8. S.Honda, Cheeger constant, p -Laplacian, and Gromov-Hausdorff convergence, Trends in Modern Geometry, The University of Tokyo, 2014/7/8
9. S.Honda, Cheeger constant, p -Laplacian, and Gromov-Hausdorff convergence, The Satellite Conference 2014 ICM "Real and complex submanifolds", NIMS, 2014/8/11
10. S.Honda, Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, Workshop: "New developments in Optimal Transport, Geometry and Analysis", The Hausdorff Research Institute for Mathematics, 2015/2/23
11. 本多正平, 空間の近さは色々な近さを導き, たまに逆もまた然り, 談話会, 東北大学, 2015/4/27.
12. S.Honda, Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, Conference on Analysis and Geometry, The University of Science and Technology of China, 2015/8/7
13. S.Honda, Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, 第 1 回日中幾何学研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2015/9/7
14. S.Honda, Elliptic PDEs on compact Ricci limit spaces and applications, 研究集会「偏微分方程式の解の形状と諸性質」, 京都大学数理解析研究所, 2015/11/12
15. S.Honda, Spectral convergence under bounded Ricci curvature, 研究集会「測地線及び関連する諸問題」, 熊本大学, 2016/1/10
16. S.Honda, Spectral convergence under bounded Ricci curvature, The Young Geometric Analysts' Forum 2016, Tsinghua Sanya International

Mathematics Forum, 2016/1/18.

17. S.Honda, Spectral convergence under bounded Ricci curvature, 幾何学セミナー, 福岡大学, 2016/2/19

18. S.Honda, Introduction of Cheeger-Colding theory, Mini course, Beijing International Center for Mathematical Research, 2016/3/30.

他 35 件

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者 本多正平 (Shouhei Honda)
東北大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 60574738

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし