

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 20 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740048

研究課題名(和文) 曲面上の主分布の大域的考察および様々な部分多様体上の主分布の研究

研究課題名(英文) Global studies of principal distributions on surfaces and researches of principal distributions on various submanifolds

研究代表者

安藤 直也 (Ando, Naoya)

熊本大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：50359965

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：Euclid空間内の曲面上の過剰決定系に関する研究成果に相当するものを他の3次元空間型内の曲面上の過剰決定系に関するものでも得た。4次元のRiemann空間型およびLorentz空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面を誘導計量およびある法ベクトル場に関する主分布の観点で特徴づけた。4次元Euclid空間内の極小曲面で各点で主曲率が単位法ベクトルに依らないものは2次元複素数空間内の複素曲線と合同であり、これを誘導計量およびある正則3次微分の観点でも特徴づけさらに局所的にアファインSchwarz写像と平行移動の合成による像と表した。球面Schwarzはめこみのある正值関数の観点で特徴づけた。

研究成果の概要(英文)：Referring to results of over-determined systems on surfaces in the Euclidean space, I obtained the corresponding results of over-determined systems on surfaces in the other 3-dimensional space forms. I obtained characterizations of spacelike surfaces with zero mean curvature vector in the 4-dimensional Riemannian and Lorentz space forms in terms of the induced metrics and principal distributions w.r.t. suitable normal vector fields. A minimal surface in the 4-dimensional Euclidean space s.t. principal curvatures do not depend on the choice of a unit normal vector is congruent with a complex curve in the two-dimensional complex number space and characterized in terms of the induced metric and a holomorphic cubic differential. In relation to this characterization, any complex curve is locally considered as the image of the composition of an affine Schwarz map and a parallel translation. I obtained a characterization of a sphere Schwarz immersion in terms of a positive-valued function.

研究分野：微分幾何学

キーワード：主分布 過剰決定系 整合条件 平均曲率ベクトルが零 複素曲線 正則3次微分 アファインSchwarz写像 球面Schwarz写像

1. 研究開始当初の背景

以前曲面上の孤立臍点の周りでの主分布の振る舞いを調べ、完全にではないが多くのことがわかった。また非臍点の近傍上で主分布の振る舞いを調べるために主分布と曲面の誘導計量の関係を議論し始め、その結果曲面の基本方程式である Gauss の方程式および Codazzi-Mainardi の方程式から得られる過剰決定系について調べ、特に 3 次元 Euclid 空間 E^3 内の曲面上の過剰決定系に関する基本的な議論は終わっていた。さらに曲面上の過剰決定系の二つの一般化についても調べていた。一つ目の一般化は「多項式型の過剰決定系」で、曲面上の過剰決定系をその一種とみなすことができ、曲面上の過剰決定系について既にわかっていたことの幾つかを多項式型の過剰決定系に関するより一般の結果として拡張することができた。二つ目の一般化として、 E^3 内の曲面上の過剰決定系の幾つかの主要な性質は二つの主分布とある 1 形式 ω によって決まることを踏まえて、 ω の微分 $d\omega$ (曲面上では Gauss 曲率 K および面積要素 dA を用いて $-KdA$ と表される) を一般の 2 形式 Ω として得られる過剰決定系を調べ、 E^3 内の曲面上の過剰決定系に関する結果に対応する結果が得られていた。

2. 研究の目的

E^3 以外の 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系についても対応する結果を得ること、および 4 次元 Riemann 空間型および 4 次元 Lorentz 空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面を誘導計量およびある法ベクトル場に関する主分布 (型作用素の固有方向場) の観点で特徴づけること、を目指す (4 次元 de Sitter 空間内のこのような曲面は共形 Gauss 写像によって 3 次元球面内の Willmore 曲面とほとんど同一視できる)。さらに、今までの研究成果を踏まえて、上述の空間内のコンパクトまたは完備な曲面について議論する (特に分類する) ことを目指す。

3. 研究の方法

1 でも記したように、 E^3 内の曲面上の過剰決定系については主分布とある 1 形式 ω に着目することで系の主要な性質を議論することができた。 E^3 以外の 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系については同様の議論は成り立たない。そこで、1 で記した曲面上の過剰決定系の二つ目の一般化に着目した。これに関して得られている結果を 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系に適用した。つまり、2 形式 Ω を $\Omega = (L_0 - K)dA$ (L_0 は空間型の一定断面曲率) とおいて、 E^3 内の曲面上の過剰決定系に関する結果に対応する結果を得ようと試みた。

また 4 次元空間型内における議論はまず Gauss の方程式、Codazzi の方程式および Ricci の方程式に立脚して行われる。空間が Riemann 空間型である場合、 E^4 内の極小曲面

が 2 次元複素数空間 C^2 内の複素曲線と合同であることとどの点でも主曲率が単位法ベクトルに依らないことは同値であることに着目して、どの点でも主曲率が単位法ベクトルに依らないものおよびどの点でも依るものを調べた (ある点で主曲率が単位法ベクトルに依らないがその任意に小さい近傍には主曲率が単位法ベクトルに依る点が存在するものはまだ調べていない)。主曲率が単位法ベクトルに依る場合には、主曲率の絶対値の最大値を与える単位法ベクトル場に着目して Gauss-Codazzi-Ricci の方程式を調べた。また空間が Lorentz 空間型である場合、はじめは Riemann 空間型内と同様に議論することを試みたが、研究成果と言えそうなものを記述することに困難を感じた。そこで法ベクトルとして光的なものに着目して議論し直したが、それでも結果を記述するまでに幾らかの試行錯誤を必要とした。

4. 研究成果

E^3 以外の 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系が整合条件を満たすための必要十分条件を求めた。 E^3 内での議論においては、整合条件から Liouville の方程式 $\phi_{uv} = e^{\phi}$ の解が現れる場合には矛盾が導かれ、従って整合条件から曲率線の族の一つが測地線からなることがわかった (後半部分は Cartan および Bryant-Chern-Griffiths の文献で既に述べられている)。一方で、 E^3 以外の 3 次元空間型内では整合条件から Liouville の方程式の解が現れても矛盾は生じず、そしてその場合の具体例を挙げることができた。また曲率線の族の一つが測地線からなる場合もあるが、この場合もう一つの曲率線の族は一定の測地的曲率を持つ曲線からなる。系がちょうど二つの解を持つための必要十分条件を求めることができるが、対応する E^3 内での結果に比べずっと複雑である。但し局所座標として等温なものをとることができる場合がちょうど零ではない一定平均曲率を持つ曲面に対応することは E^3 内での結果と同様である。また系が唯一つの解を持ちかつ条件 $Y^2 - 4XZ = 0$ (X, Y, Z についての説明はここでは省略するが、 E^3 内での議論に現れたものと同様である) を満たすための必要十分条件も同様の形で求められ、局所座標として等温なものをとることができる場合はちょうど極小曲面に対応する。

4 次元 Riemann 空間型内の極小曲面で曲率が空間の一定断面曲率より小さいものについて、どの点でも主曲率が単位法ベクトルに依らないものの特徴づけを得た。またどの点でも主曲率が単位法ベクトルに依るものについては、主曲率の絶対値の最大値を与える単位法ベクトルの滑らかな場が局所的に存在することに着目して、これに関する主分布と誘導計量の観点での特徴づけを得た。このような曲面は既に Tribuzy-Guadalupe による 1985 年の論文でも調べられていて、上述の特

徴づけに現れる方程式に対応する方程式が法接続の曲率の観点で記述されているが、この論文では主分布と誘導計量の観点での特徴づけは行なわれていない（この観点で主分布に着目することはないだろう）。

4次元 Lorentz 空間型内の平均曲率ベクトルが零である空間的曲面で曲率が空間の一定断面曲率と異なるものの光的法ベクトル場に関する主分布と誘導計量の観点での特徴づけを得た（この特徴づけに現れる方程式に対応する方程式は、Alias-Palmer による 1998 年の論文および Ganchev-Milousheva による 2013 年の論文において法接続の曲率の観点で記述されている）。

E^4 内の極小曲面に関する上述の特徴づけの別表現が、誘導計量とある正則 3 次微分の観点で得られた。 N を一般の 4 次元超 Kaehler 多様体とし、 I, J, K を N の三つの複素構造とする。 I に関する N 内の複素曲線 M の第二基本形式および複素構造 J から、 M 上のある 3 次共変テンソル場 T で M 上のある複素 3 次微分 Φ の実部であるものを構成することができる。 N が平坦である場合、Gauss-Codazzi-Ricci の方程式から Φ は正則 3 次微分であることがわかりかつ Φ と誘導計量の間のある関係式を得ることができ、この関係式が E^4 内の極小曲面に関する上述の特徴づけの別表現であることは直ちにわかる。さらに Riemann 面 M 上に共形計量および正則 3 次微分 Φ でこの関係式を満たすものが与えられたとき、整合条件を満たすある線形過剰決定系の解を用いて M の C^2 への正則はめこみを局所的に構成できる。また M の C^2 への共形はめこみ F が与えられたとき、上のような共変テンソル場 T がある正則 3 次微分 Φ の実部でありかつ Φ と誘導計量の間のある関係式が成り立つならば、 F と $C^2 = E^4$ のある等長変換の合成は正則はめこみであることもわかる。

C^2 内の複素曲線を前段落のように誘導計量および正則 3 次微分 Φ の観点で特徴づけることができるが、この特徴づけに現れる Φ を局所複素座標 w を用いて $\Phi = \phi dw^3$ と表すとき、この複素曲線は局所的に 2 階線形方程式 $d^2f/dw^2 + \phi f = 0$ の基本解によって構成されるアファイン Schwarz 写像と C^2 の平行移動の合成による像とみなされることがわかった。球面 Schwarz 写像とは C^2 の原点が像に含まれないアファイン Schwarz 写像と $E^4 = C^2$ から 3 次元球面 S^3 への射影の合成であるが、球面 Schwarz 写像がはめこみである場合にある正值関数 ρ を用いて第一基本形式および第二基本形式の観点でその特徴づけを行なうことができた。球面 Schwarz 写像を与えるアファイン Schwarz 写像による各点の像と C^2 の原点の間の距離を与える正值関数 ρ は $(\log \rho^2)_{uu} + (\log \rho^2)_{vv} = 4/\rho^4$ を満たし（但し u, v は w の実部および虚部）、この ρ を用いてはめこみである球面 Schwarz 写像の第一基本形式および第二基本形式を

記述できる。また Riemann 面 M 上の正值関数 ρ で M の各点の近傍上のある複素座標 w に対しこの式を満たすものが与えられたとき、この ρ に対応するアファイン Schwarz 写像が存在しそしてこれが与える球面 Schwarz 写像ははめこみである。

また以前調べた多項式型の過剰決定系についてさらに詳しいことがわかった。まず系 $df = \theta$ (θ は多様体上の 1 形式) が局所解を持つことと θ が閉形式であることが同値であることはよく知られていて、解を持つとき系は整合条件を満たすので 1 点で与えられた初期値に対し解は一意に定まる。また系 $df = \theta_0 + f\theta_1$ が 1 つの解 f_1 を持つことがわかっているとき、もう一つの解 f_2 が存在することと系が整合条件を満たすことは同値である。系 $df = \theta_0 + f\theta_1 + f^2\theta_2$ が各点で異なる値をとる 2 つの解 f_1, f_2 を持つことがわかっているとき、もう一つの解 f_3 が存在することと系が整合条件を満たすことは同値である。さて系 $df = \theta_0 + f\theta_1 + f^2\theta_2 + f^3\theta_3$ が各点で異なる値をとる 4 つの解 f_1, f_2, f_3, f_4 を持つことがわかっているとき、系に現れる 1 形式 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ は f_1, f_2, f_3, f_4 によって表される。従って系が整合条件を満たすかどうかは f_1, f_2, f_3, f_4 によって決まり、そのための関係式を具体的に記述できる。今回わかったことは、各点で異なる値をとる関数 f_1, f_2, f_3 から作られる 1 形式 $\eta = (f_1 - f_2)df_3 + (f_2 - f_3)df_1 + (f_3 - f_1)df_2$ が零にならないならば、これらの関数に対しその関係式を満たす f_4 が存在し、 η が零にならない接ベクトルを持つ曲線上で与えられた初期値に対し f_4 は一意に定まるということである。1 形式 η は多様体上の包摂的分布 D を定め、多様体の次元が 3 以上である場合上述の関係式は D の各積分超曲面上の過剰決定系で整合条件を満たすものを与えることがわかり、上の結果が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Naoya Ando, Over-determined systems on surfaces, *Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics*, 2014, 273-287 (査読有).
- ② Naoya Ando, A family of surfaces in E^3 given by an over-determined system, to appear in *Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields* (査読有).

[学会発表] (計 15 件)

- ① 安藤直也, Over-determined systems on surfaces, 第 59 回幾何学シンポジウム, 九州大学 (福岡市), 2012 年 8 月 28 日.
- ② 安藤直也, Over-determined systems on surfaces in 3-dimensional space forms, 福岡大学幾何学研究会, 福岡大学セミナー

- ーハウス (福岡市), 2012 年 11 月 2 日.
- ③ 安藤直也, Over-determined systems on surfaces in 3-dimensional space forms, 研究集会「測地線および関連する諸問題」, 熊本大学 (熊本市), 2013 年 1 月 13 日.
- ④ 安藤直也, Willmore 球面について, 研究集会「多様体上の変分問題とその周辺領域」, 山口県健康づくりセンター (山口市), 2013 年 2 月 14 日, 15 日.
- ⑤ 安藤直也, 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系, 2013 年日本数学会年会幾何学分科会, 京都大学 (京都市), 2013 年 3 月 20 日.
- ⑥ 安藤直也, 3 次元空間型内の曲面上の過剰決定系について, 九大幾何学セミナー, 九州大学 (福岡市), 2013 年 6 月 14 日.
- ⑦ Naoya Ando, Over-determined systems in relation to principal curvatures, Differential Geometry and its Applications 2013, Masaryk University, Brno (Czech), August 22, 2013.
- ⑧ Naoya Ando, A family of surfaces given by an over-determined system, International Conference on Topology and Geometry Joint with the Sixth Japan-Mexico Topology Symposium, 島根大学 (松江市), September 3, 2013.
- ⑨ 安藤直也, Molding surfaces and parallel curved surfaces, 福岡大学幾何学研究会, 福岡大学セミナーハウス (福岡市), 2013 年 11 月 3 日.
- ⑩ 安藤直也, 共形 Gauss 写像について, 福岡大学幾何学セミナー, 福岡大学 (福岡市), 2014 年 1 月 9 日.
- ⑪ 安藤直也, Molding surfaces and parallel curved surfaces, 研究集会「測地線および関連する諸問題」, 熊本大学 (熊本市), 2014 年 1 月 12 日.
- ⑫ 安藤直也, Euclid 空間内の部分多様体の反転による像のコンパクト化, 研究集会「多様体上の変分問題とその周辺領域」, 山口県健康づくりセンター (山口市), 2014 年 2 月 12 日.
- ⑬ 安藤直也, 4 次元 de Sitter 空間内の平均曲率ベクトルが零である曲面, 研究集会「多様体上の変分問題とその周辺領域」, 山口県健康づくりセンター (山口市), 2014 年 2 月 13 日, 14 日.
- ⑭ Naoya Ando, Local characterizations of surfaces in various spaces by induced metrics and principal distributions, the 8th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems, Callatis High School, Mangalia (Romania), September 2, 2014.
- ⑮ Naoya Ando, Local characterizations of surfaces in various spaces by induced metrics and principal distributions, the 4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related

Fields, Rectorat Building, Europe Hall, St. Cyril and St. Methodius University, Veliko Tarnovo (Bulgaria), September 10, 2014.

〔図書〕 (計 3 件)

- ① 安藤直也, Willmore 予想および Willmore 曲面について, 山口大学理学部数理科学科, 2012 (総ページ数: 53).
- ② 中内伸光編集, 守屋克洋・安藤直也・川上裕共著, Willmore 曲面について, 山口大学理学部数理科学科, 2013 (総ページ数: 39 (このうち 19 ページを担当)).
- ③ 中内伸光編集, 加藤信・守屋克洋・安藤直也共著, Willmore 曲面について 第 2 巻, 山口大学理学部数理科学科, 2014 (総ページ数: 86 (このうち 43 ページを担当)).

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~ando/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安藤 直也 (ANDO, Naoya)

熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号: 50359965