様　式　C−１９、F−１９、Z−１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号： ８２７２３
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４７４００５３

研究課題名（和文） 多面体の構成を通じたループ空間の高位ホモトピー可換性の研究

研究課題名（英文） Study of higher homotopy commutativity of loop spaces by constructing polytopes

研究代表者
河本　裕介（KAWAMOTO, Yusuke）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・総合教育学群・准教授

研究者番号：１０５３１７５９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）： 高位ホモトピー可換性の概念は位相モノイドの場合に菅原により最初に研究された．本研究では Bott と Taubes により構成された巡回多面体を用いてループ空間（高位ホモトピー結合的ホップ空間）に対する新しい高位ホモトピー可換構造を構成した．また Kapranov により構成された置換結合多面体を巡回多面体の積空間の和集合として組合せ論的に分解した．更にその分解から今回構成した新しい構造と以前の研究において置換結合多面体を用いて導入したループ空間に対する別の高位ホモトピー可換構造との関係性について解析した．

研究成果の概要（英文）： The concept of higher homotopy commutativity was first studied by Sugawara in the case of topological monoids. In the present study, we constructed a new higher homotopy commutativity for the (loop) multiplications of loop spaces (higher homotopy associative Hopf spaces) using cyclohedra constructed by Bott and Taubes. We also gave combinatorial decompositions of permuto-associahedra constructed by Kapranov into unions of product spaces of cyclohedra. Then the cyclohedron can be regarded as a subspace of the permuto-associahedron. From the decompositions, we also studied relations between the new concept of higher homotopy commutativity and another one represented by the permuto-associahedra.

研究分野： 代数的位相幾何学

キーワード： ループ空間　ホップ空間　高位ホモトピー可換性　巡回多面体　置換結合多面体

１．研究開始当初の背景

ループ空間は空間上の基点を保つループ全体からなる写像空間であり, 幾何学における重要な研究テーマの 1 つである. また高位ホモトピー可換構造は空間における積 (演算) の交換法則の自由度を各種多面体を用いてホモトピー論的に特徴付けた構造である.

位相モノイドに対する高位ホモトピー可換構造は菅原により最初に研究され, 後に Williams は置換多面体 (permutohedra) $\{P_n\}_{n\geq 1}$ を用いた定義を与えた. ここで置換多面体とは多重ループ空間の近似を与えるため Milgram により導入された多面体である (図 1,5).

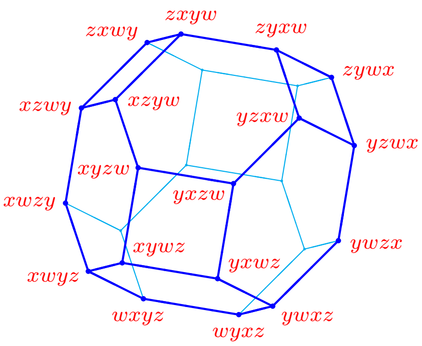


図 1: 置換多面体 P_4

また高位ホモトピー結合構造も菅原により最初に導入され, Stasheff は結合多面体 (associahedra) $\{K_n\}_{n\geq 1}$ の構成により菅原理論を発展させ A_n-空間の概念に到達した. 空間 X の A_n-構造は高位ホモトピーの族 $\{\mu_i\colon K_i\times X^i \to X\}_{1\leq i\leq n}$ により定められる. 定義から A_3-構造は積のホモトピー結合構造であり, A_4-構造は図 2 の 5 角形で表現される 2 次ホモトピーである. このとき A_n-構造を持つ空間は A_n-空間と呼ばれる. 特に A_∞-空間はループ空間と同じである.

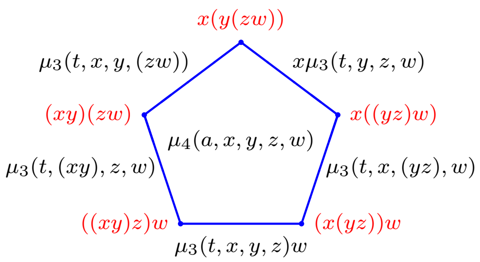


図 2: A_4-構造

位相モノイドの積が結合的であるのに対し, ループ空間におけるループ積は結合多面体 $\{K_n\}_{n\geq 1}$ で表現される A_∞-構造を持つ. したがって位相モノイドに対する高位ホモトピー可換構造をループ空間 (A_n-空間) の場合に拡張するためには, その構造を表現する多面体の各頂点を結合多面体で置き換えた多面体が必要となる.

Kapranov が置換多面体の各頂点を結合多面体で置き換えた面ポセットを持つ置換結合多面体 (permuto-associahedra) $\{KP_n\}_{n\geq 1}$ を構成したことに基づき, 研究代表者と高知大学の逸見は AC_n-構造と呼ばれる高位ホモトピー可換構造を構成し, 位相モノイドに対する Williams の構造を A_n-空間の場合に拡張した (図 3,7). また AC_n-構造を用いてループ空間のホモトピー論的諸性質を解明するための研究を行った.

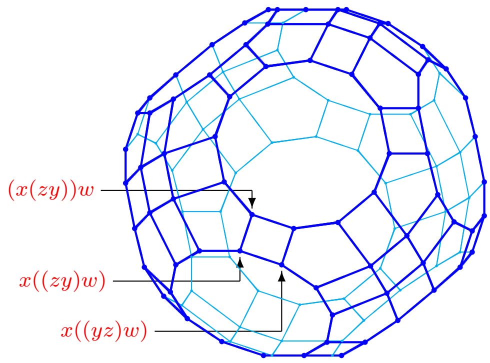


図 3: 置換結合多面体 KP_4

更に我々は Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky により構成された終結多面体 (resultohedra) $\{N_{m,n}\}_{m,n\geq 1}$ を用いて菅原理論を精密化したが, その過程において $C(n)$-構造と呼ばれる単体を用いた位相モノイドの高位ホモトピー可換構造を研究した. 定義から $C(2)$-構造は積のホモトピー可換構造である. $C(n)$-構造は有理化された空間上では Williams の構造と一致するが一般的には異なることも証明されている.

２．研究の目的

最初に新しい高位ホモトピー可換構造を導入し, 位相モノイドに対する $C(n)$-構造をループ空間 (A_n-空間) の場合に拡張する. 次にその新しい構造を用いてループ空間のホモトピー論的諸性質を解明する. 具体的にはループ空間の分類空間がホモトピー論的代数構造を持つための条件をループ積の高位ホモトピー可換構造により特徴付ける. また高位ホモトピー可換構造を持ち, 素数 p で局所化された無限次元ループ空間 (A_n-空間) の分類を行う. 更に今回導入する新しい構造と AC_n-構造との関係性を調べる.

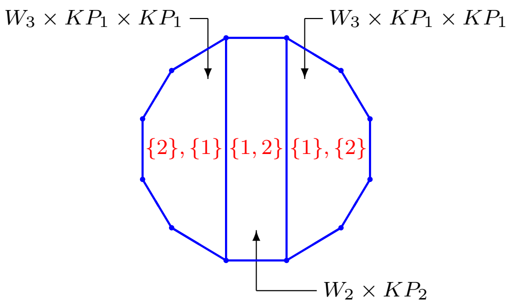
置換多面体 P_n の頂点が n 次対称群 Σ_n に対応するのに対し, 終結多面体 $N_{m,n}$ の頂点は (m,n)-シャッフル全体からなる対称群の部分集合に対応する. 本研究ではこれらを一般化

し, 頂点が $(m_1,\dots,m_\ell)$-シャッフルに対応する一般終結多面体 (generalized resultohedra) を構成する．そしてその新しい多面体を用いて菅原理論の精密化を更に発展させることを目指す．

多面体は組合せ論や代数幾何学など各種分野から重要な例を持ち, それぞれの側面から活発に研究されている．本研究の目的は多面体をホモトピー論的側面, 特にループ空間の高位ホモトピー可換構造という観点から解析することにより, ホモトピー論と他分野との関連性を見出すことである．

３．研究の方法

(1) 位相モノイドに対する $C(n)$-構造をループ空間 (A_n-空間) の場合に拡張するため, 単体の各頂点を結合多面体で置き換えた面ポセットを持つ多面体が必要となる．Bott-Taubes により構成された巡回多面体 (cyclohedra) $\{W_n\}_{n\geq 1}$ はその性質を満たすが, 彼らの定義における巡回多面体 W_n の面ポセットは円周上に配置された n 個の順序付きラベル $x_1,\dots,x_n$ への括弧付けにより記述されており, そのままの形では本研究で必要とする新しい高位ホモトピー可換構造との関係性が明らかでない．



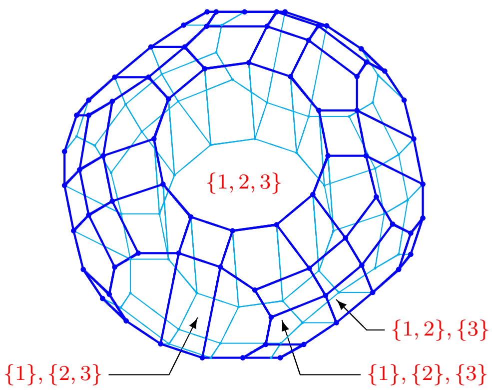


図 4: 置換結合多面体 KP_3 と KP_4 の分解

そこで巡回多面体を置換結合多面体の部分空間として再構成することにより $C(n)$-構造と A_n-構造を合成した高位ホモトピー可換構造に適合する巡回多面体 W_n の新しい面ポセットを定義し, それが Bott-Taubes による面ポセットと組合せ同値であることを証明した．同時に巡回多面体の面作用素と退化作用素も再構成し, それらの間の関係式を解析した．

最初に $\{1,\dots,n-1\}$ の分割と呼ばれる組合せ論的構造を用いて置換結合多面体 KP_n を巡回多面体 $\{W_i\}_{1\leq i\leq n}$ の積空間の和集合として分解した (図 4)．これは置換多面体の単体による分解を与えた逸見と Kapranov-Voevodsky の結果の一般化である．また Mac Lane と Bar-Natan も置換結合多面体 KP_3 の分解を得ており, 本研究における分解は彼らの結果の高次元の場合への拡張と考えられる．特に分割 $\{1\},\dots,\{n-1\}$ を考えることにより巡回多面体 W_n は置換結合多面体 KP_n の部分空間と見なせる．

研究代表者はこれまで多面体を別の多面体を用いて組合せ論的に分解し, それぞれの表現する高位ホモトピー構造を比較する各種研究を行っている．特に写像に対する AC_n-構造の概念を導入するため, 置換結合多面体の乗法多面体 (multiplihedra) による分解を行った．ここで乗法多面体とは岩瀬-三村により写像に対する A_n-構造を定義するために構成された多面体である．

この分解は乗法多面体を凸多面体として再構成した Forcey の研究で引用され, 組合せ論の分野でも重要視されている．これは本研究の目的の 1 つである多面体を通じてホモトピー論と他分野とを関連付けることに適合する．本研究における置換結合多面体の分解も今後他分野と関連付けられることが期待される．

(2) n 次対称群 Σ_n は座標の置換により n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ に作用する．置換多面体 P_n は軌道 $\{\sigma(1,\dots,n)\mid\sigma\in\Sigma_n\}$ の凸包からなる $\mathbb{R}^n$ の部分集合であり, 同時に超平面 $\{(t_1,\dots,t_n)\mid t_1+\cdots+t_n=n(n+1)/2\}$ の部分集合でもある (図 5)．

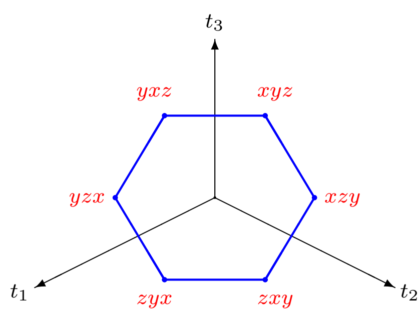


図 5: 置換多面体 P_3

ここで $m_1,\dots,m_\ell\geq 1$, $m_1+\cdots+m_\ell=n$ に対し, $\mathbb{R}^n$ の $n-\ell$ 個の超平面を定義し, それらで置換多面体 P_n を切り取ることにより一般終結多面体 $N_{m_1,\dots,m_\ell}$ を構成した．これは以前の研究で終結多面体 $N_{m,n}$ を再構成し

た際に用いた方法の一般化である.

４．研究成果

(1) 巡回多面体を用いて B_n-構造と呼ばれる新しい高位ホモトピー可換構造を導入し, 位相モノイドに対する $C(n)$-構造をループ空間 (A_n-空間) の場合に拡張した. ここで A_n-空間 X の B_n-構造は高位ホモトピーの族 $\{\varphi_i\colon W_i \times X^i \to X\}_{1\le i\le n}$ により定められる. 定義から B_2-構造は積のホモトピー可換構造であり, B_3-構造は図 6 の上の 6 角形で表現される 2 次ホモトピーである.

このとき A_4-構造がモノイド・カテゴリーの概念に拡張されているのに対し, B_3-構造はブレイド・カテゴリーと密接に関連している. 今後巡回多面体や B_n-構造を高次元カテゴリーやオペラッドにおける各種構造に拡張し, 他分野への新しい研究手段の導入を目指す.

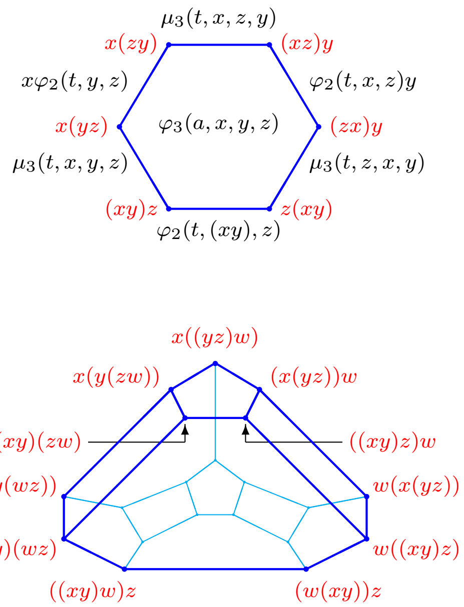


図 6: B_3-構造と B_4-構造

(2) ループ空間 X が B_∞-構造を持つことと X の分類空間 BX が T-構造を持つことが同値であることを示した. Aguadé により導入された T-構造は自由ループ空間が基点付きループ空間に分解するかを調べるための指標であり, 近年有理ホモトピー論などにおいて重要視されているため今後本研究成果の様々な応用が期待される.

また巡回多面体と乗法多面体の組合せ論的関係性を詳しく解析することによりループ写像に対する B_n-構造を導入した. 更に Farjoun により導入されたホモトピー局所化が B_n-構造を保存することを証明した. 応用として B_n-構造が被覆空間と Postnikov 系列の構成により保存されることが示された.

(3) 置換結合多面体の巡回多面体による組合せ論的分解を用いて A_n-空間 X が B_n-構造を持つとき X は AC_n-構造を持つことを証明した (図 7). 同時に $n > p$ で $n \not\equiv 0 \bmod p$ の場合 B_{n-1}-構造と AC_∞-構造の両方を持つが B_n-構造は持たないループ空間の具体例を構成し, 上記結果の逆の命題が一般的には成立しないことも示した. これらの結果は位相モノイドに対する $C(n)$-構造と Williams の構造との関係性を調べた以前の結果を A_n-空間の場合に拡張したものである.

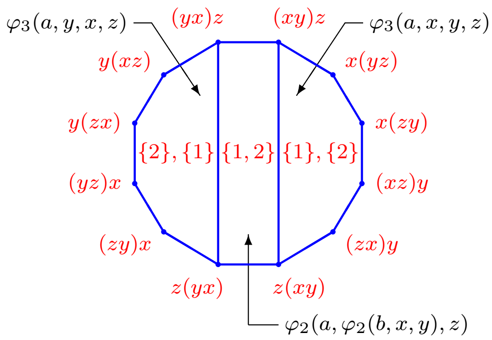


図 7: AC_3-構造の構成

(4) 素数 p で局所化された連結ループ空間 (A_p-空間) X が B_p-構造を持ち $\mathbb{F}_p$-係数コホモロジー環が有限生成環であるとき X は p-局所化された円周 $S^1_{(p)}$ と無限次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^\infty_{(p)}$, 無限次元レンズ空間 $B\mathbb{Z}/p$ の直積空間にホモトピー同値であることを証明した. 同時に p-局所化された奇数次元球面 $S^{2t-1}_{(p)}$ は B_{p-1}-構造を持つことを示し, 上記結果における B_p の条件を B_{p-1} に弱めることはできないことも分かった. これは Hubbuck と Lin によるトーラス定理を奇素数と無限次元の場合に拡張した結果である.

ある整数 t に対し, 空間 X のホモトピー群が $\pi_i(X) = 0$ $(i > t)$ となるとき X は Postnikov 空間と呼ばれる. この Postnikov 空間の概念を用いて, 上記結果を $\mathbb{F}_p$-係数コホモロジー環が Steenrod 代数上有限生成環である場合に更に拡張する結果も得られた.

(5) 高知大学の逸見との共同研究として, 頂点が $(m_1,\ldots,m_\ell)$-シャッフル全体からなる対称群の部分集合に対応する一般終結多面体 $N_{m_1,\ldots,m_\ell}$ を構成した. 特に $\ell = 2$ のときが終結多面体 N_{m_1,m_2} であり, $m_i = 1$ $(1 \le i \le \ell)$ の場合が置換多面体 P_ℓ である.

またこの多面体を用いて菅原理論の精密化を更に発展させるための研究に着手した. 今後 $C(n)$-構造や Williams の構造を含む形で位相モノイドに対する高位ホモトピー可換構造の統一的な理論の構築を目指す.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Yusuke Kawamoto, Higher homotopy commutativity of H-spaces and the cyclohedra, (査読有), Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 49, (2013), 737–760.
DOI:10.4171/PRIMS/118

〔学会発表〕（計３件）

① 河本 裕介, p-正則ホップ空間上のベキ写像の高位ホモトピー結合性について, (招待講演), 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2014 年 9 月 18 日, 信州大学 (長野県・松本市).

② 河本 裕介, Higher homotopy associativity of power maps on finite H-spaces, ホモトピー論シンポジウム, 2013 年 11 月 4 日, 岡山大学 (岡山県・岡山市).

③ 河本 裕介, ホップ空間の高位ホモトピー可換性と巡回多面体, 日本数学会 2013 年度年会トポロジー分科会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学 (京都府・京都市).

６．研究組織

(1) 研究代表者

河本　裕介（KAWAMOTO, Yusuke）
防衛大学校・総合教育学群・准教授
研究者番号：１０５３１７５９