

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 20 日現在

機関番号：13902

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740057

研究課題名(和文)自由確率論に動機をもつランダム行列の研究

研究課題名(英文)Research on Random Matrices Motivated by Free Probability

研究代表者

佐久間 紀佳(SAKUMA, Noriyoshi)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：70610187

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：自由確率論に動機をもつランダム行列の研究として、サイズの大きいランダム行列のスペクトル分布の極限分布についての研究を自由確率論の観点から行った。とくにランダム行列の要素間に従属性があるようなモデルを扱い、その極限分布が複合自由ポアソン分布であることを示した。またその摂動について「2次の自由性」という概念を用いて計算した。

また、その行列地確率過程を考える上で重要な自由確率論における無限分解可能分布の分布の時間発展についての研究を行った。

それら結果について論文にまとめた。またこれらの結果について10回以上の発表を行った。

研究成果の概要(英文)：We study Random Matrix motivated by free probability. In this project, limiting spectral distributions of large random matrices were studied from free probability. In particular, we studied random matrix models with dependent entries and we proved its limiting distributions are the compound free Poisson distributions. We also computed fluctuations by "second order freeness".

On the other hand, we studied time evolution of distributions of free infinitely divisible distributions which is important to study time evolution of Random matrix valued processes.

We wrote some papers related to this results. I gave talks related to these results more than 10 times.

研究分野：確率論

キーワード：自由確率論 無限分解可能分布 国際情報交換 メキシコ ポーランド フランス ランダム行列

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は無限分解可能分布およびレヴィ過程の研究を出発点に研究を開始した。

確率論の中で分布というものを考えることはもっとも基本的かつ重要なことである。その中で中心極限定理の極限分布である正規分布やポアソン分布、ガンマ分布をはじめとする重要な分布を多く含むクラスである無限分解可能分布と呼ばれるクラスがある。このクラスは分布の畳み込みの演算\*を用いて定義される。この分布のクラスに対してレヴィ・ヒンチン表現と呼ばれるその分布の特性関数(フーリエ変換)に対しての特徴付けがよく知られている。この特徴付けは極限定理の研究と密接に関連している。また無限分解可能分布のクラスはレヴィ過程と呼ばれるブラウン運動を含む時間・空間的一様な確率過程のクラスと一対一対応になっており、無限分解可能分布を研究することはレヴィ過程の分布を研究するという意味する。無限分解可能分布という視点から確率論を研究することは、非常に豊かな確率論の世界を分布から垣間みる一つの視点であると考えられている。(参考文献④)。

上記の無限分解可能分布の観点から自由確率論と呼ばれる新しい確率論に興味を持って研究を行っている。1980年代半ば頃に Voiculescu が確率論における最も重要な概念の一つである独立性を新しい独立性「自由独立性」に置き換えた確率論である「自由確率論」を群フォンノイマン環のある問題を解くために導入した。通常の独立性であれば独立な(可換)確率変数  $X, Y$  に対して

$$E[XYXY] = E[XXYY] = E[X^2] E[Y^2]$$

となるが、自由独立性は積についての非可換性を反映した独立性であり上のような関係は成り立たない。このように通常確率論と比べると、モーメントに違いが現れ、確率論における極限定理の類似を考えると極限分布にも違いが出る。Voiculescu は作用素環への応用をにらみながら、その自由独立性での下での確率論の対応の研究を進めた。その中で自由確率論の枠組みの中で中心極限定理の対応物を見るとその極限分布は巨大なランダム行列スペクトル分布の極限としてよく知られている半円分布に収束することがわかった。このことから Voiculescu はランダム行列理論との関連性を予想し、実際に自由確率論を用いることで巨大なランダム行列のスペクトル分布を見積もることが出来ることを示した。

他方、Voiculescu はその中で畳み込みの概念の自由確率論における対応である自由畳み込みを導入した。これにより無限分解可能分布のクラスの対応物がやはり自由確率論の世界でも定義され、レヴィ・ヒンチン表現型の特徴付けにも成功した(参考文献⑤)。

その後、自由確率論の確率論的側面の研究

は無限分解可能や極限定理の視点を下に進展していく中で、自由独立な確率変数の和の極限定理とレヴィ・ヒンチン表現型については通常確率論とかなり対応がきれいに成り立っていることが判明した。(参考文献①)。

研究代表者は通常測度論に基づいた確率論における無限分解可能分布の研究と対比をしながら、自由確率論における無限分解可能分布の研究を行ってきた。特に、新しいタイプの極限定理を発見した。自由確率論の枠組みの中で中心極限定理型のように自由独立な確率変数の和のみを考えるのではなく、平均1に規格化された自由独立な確率変数の積および和が同時に増えていくようなスケールリングを考え、そのスケールリング極限として新しい分布を見つけた。より具体的には  $\{X_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty} \{j=1\}^{\infty}$  を  $[0, \infty]$  値をとる平均1の「自由独立」同分布二重確率変数列で分散が有限な値をとるものとする。そのもとで、次のようなスケールリングを考える：

$$Y_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^N X_i^{(j)}.$$

ここで  $N$  を無限大へ近づけていくとこのスケールリングの極限の極限分布が存在する。特に、その極限分布に対応する解析的変換である  $S$ -変換(確率論でいうメルン変換に対応する自由独立な確率変数の積の性質を調べるための道具)がランベルトの  $W$  関数と呼ばれる特殊関数で表現できるということがわかった。この分布は Wixhart ランダム行列により極限分布として実現できる。他方、この極限分布と同様にランベルトの  $W$  関数で  $S$ -変換が表現できる極限分布をランダム行列が他にも知られていることも注意しておきたい。(参考文献②, ③) このような背景から自由積畳み込みとランダム行列の関係について探り始めた。

<<参考文献>>

- ① H. Bercovici and V. Pata. Stable laws and domains of attraction in free probability theory (with an appendix by Philippe Biane). *Annals of Mathematics* (2), **149**, 1023--1060 (1999).
- ② K. J. Dykema and U. Haagerup. Invariant subspaces of the quasinilpotent DT-operator. *Journal of Functional Analysis*, **209**(2):332 -- 366, (2004)
- ③ N. Sakuma and H. Yoshida. New limit theorems related to free multiplicative convolution. *Studia Math.* **214** (2013), no. 3, 251--264.
- ④ K. Sato. *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge

University Press, Cambridge (1999).

⑤D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. Free random variables. volume 1 of CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups.

## 2. 研究の目的

今回の研究ではこれらの自由確率論の世界でわかった新しい事実をもとにしてランダム行列モデルを構成し、それをより詳細な摂動など最近進展している自由確率論的手法を用いて深く解析していくことを目指した。

より具体的には、ランダム行列の成分の独立性の仮定を外すとどのようなことが言えるか、上記の極限定理がどの程度の一般的なランダム行列の極限で得られるかを調べることを目的とした。特にランダム行列の成分が時系列モデルで与えられるようなケースを考え実際のデータ解析に応用できるような形で従属性を入れたモデルを中心に考えた。

またそれに関連して自由無限分解可能分布のサブクラスの中での閉じている性質を探ることを目指した。

## 3. 研究の方法

自由確率論における無限分解可能分布の研究を深めつつそれを元に巨大なランダム行列のスペクトル分布の見積もる、詳細な分布の性質を見つけないというルートを全研究期間を通して取り続けた。

特に、成分間に従属性があるランダム行列の研究を行うため、モデルを複合 Wishart 行列、及び複合自由ポアソン分布に話を落としこむ、という方法で研究を行った。

また自由無限分解可能分布に対しては積畳み込みによる mixture や Markov 変換と呼ばれる表現論由来の表現と無限分解可能分布のサブクラスの変換についての研究、また分布の時間発展のもとで閉じている性質を探ることを R 変換や S 変換の計算と複素解析的方法により調べた。

これらを遂行するため国内のお茶の水大学、北海道大学、京都大学、慶応大学の研究者を訪問あるいは招聘し研究打ち合わせを定期的に行った。またメキシコ・ポーランドを訪問し、その研究者らやそこで行われている研究集会の参加者と討論意見交換を行った。また関連する他分野の研究会にも積極的に参加し、情報収集を行った。

## 4. 研究成果

「自由確率論に動機をもつランダム行列の研究」として自由レヴィ過程の分布についての研究を中心に行った。そのなかでも特に

非減少レヴィ過程の自由確率論における対応物について調べた。その結果、通常確率論では知られていないいくつかの性質を見つけた。それらの結果は雑誌論文の③で掲載された。

この非減少レヴィ過程の自由確率論における対応物のクラスは自由確率論における重要な分布のいくつかを含んでおり、大変興味深い。また特に分布の台の時間発展なども自由確率論における重要な量である「自由キウムラント列」をもちいて表現することが出来た。

またそれらに関連するランダム行列モデルをお茶の水女子大学の吉田裕亮氏らのグループとともに考えた。自己回帰移動平均モデルを行列の元とするような従属のあるランダム行列モデルを、複合 Wishart 行列と呼ばれるランダム行列の形に変形して、自由確率論的方法により、そのスペクトル分布の収束を示し、極限分布を調べた。そこで出てくる極限分布は複合自由ポアソン分布と呼ばれる分布のクラスに入る自由ベッセル分布であった。複合自由ポアソン分布も非減少レヴィ過程の自由確率論における対応物の分布の一つであるので前者の性質をそのまま持つ。それらの結果は雑誌論文の②で発表された。また学会発表②、③などでも発表された。

当時ドイツザールランド大学（現在メキシコ CIMAT）の Arizmendi 氏とともに自由確率論におけるあたらしい Generalized Gamma Convolution のクラスを導入しその性質と Markov 変換との関係についていくつかの例を見つけた。それは学会発表①で発表された。

自由無限分解可能分布におけるモードについての研究を行った。自由無限分解可能分布に関して幾人かの研究者がどのクラスで単峰性を持つかを示しているが、時間発展を含めた研究は殆ど行われておらず、そこからスタートし、いくつかの例を共同研究者らと論文としてまとめている。またある種のクラスに属するとその単峰性の性質が時間発展のもとでも保たれることがわかった。

自由独立性だけでなく単調、Boolean 独立性のもとでの安定分布に対しても同様のことを考えた。その結果、単調、Boolean のケースの場合は安定分布においてもすでに単峰性は必ずしも成り立たないことが判明した。逆に単峰であるケースも存在する。それらについての結果を論文としてまとめ、掲載予定になっている。雑誌論文①。

自己回帰移動平均モデルを変形し、行列の横方向だけでなく縦方向にも従属のあるランダム行列モデルを、やはり複合 Wishart 行列の形に変形して、自由確率論的方法により、そのスペクトル分布の収束を示し、極限分布を調べた。その際、その収束の摂動についても調べた。実際二次の自由独立性という概念を用いて、その摂動が自己回帰移動平均モデルの係数から計

算できることも確認し、それらを論文としてまとめている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① T. Hasebe and N. Sakuma. Unimodality of Boolean and monotone stable distributions, to be published from Demonstr. Math. 査読あり

② A. Hasegawa, N. Sakuma and H. Yoshida. Random matrices by MA models and compound free Poisson laws. Probab. Math. Statist. 33 (2013), no. 2, 243-254. 査読あり

③ O. Arizmendi, T. Hasebe and N. Sakuma. Free regular infinite divisibility and squares of random variables with  $\boxplus$ -infinitely divisible distributions. ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 10 (2013), no. 1, 271-291. 査読あり

④ N. Sakuma and H. Yoshida. New limit theorems related to free multiplicative convolution. Studia Math. 214 (2013), no. 3, 251-264. 査読あり

[学会発表] (計9件)

① 佐久間紀佳, Generalized Gamma Convolutions と Markov 変換、共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2014年11月29日、統計数理研究所(東京都)

② Noriyoshi Sakuma, On Marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries, 16th-workshop: Noncommutative harmonic analysis, 7th July 2014, Bedlewo (Poland).

③ 佐久間紀佳, 成分間に従属性があるランダム行列の極限スペクトル分布について、共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2013年11月13日、統計数理研究所(東京都)

④ Noriyoshi Sakuma, Free Infinitely Divisible Distributions From A Point Of View Of Subordinators and Mixtures. 7th International Conference on Lévy Processes: Theory and Applications, 17th July 2013, Wroclaw University (Poland).

⑤ 佐久間紀佳, 成分間に従属性があるランダム行列の極限スペクトル分布について、共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」、2013年11月13日、統計数理研究所(東京都)

⑥ 佐久間紀佳, 自由確率論における非減少レヴィ過程の分布について、確率論シンポジウム、2012年12月21日、京都大学(京都府)

⑦ 佐久間紀佳, Variance mixture and subordinator in free probability、確率解

析とその周辺、2012年10月25日、名古屋大学(愛知県)

[その他]

ホームページ等

<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~sakuma/>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐久間 紀佳(SAKUMA, Noriyoshi)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号: 70610187