様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４２０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４００７６

研究課題名（和文）有限点集合の配置とその部分構造に関する研究

研究課題名（英文）Research on configurations of point sets and their substructures

研究代表者
篠原　雅史（Shinohara, Masashi）

滋賀大学・教育学部・講師

研究者番号：７０４３２９０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた空間におけるよい点の配置を考えることは符号理論やデザイン理論など様々な枠組みで行われている．それぞれの枠組みでよい配置を考えること，また，よい配置を通して枠組み間の関係を見出していくことは本研究分野における最大の目的であるといえる．
本研究では，空間における点の配置問題の中でも，現れる二点間の距離の種類が少ない配置について研究を行った．配置とそれに対応する離散構造の関係性を用いて，配置とその部分構造に関する幾つかの結果を得ることができた．

研究成果の概要（英文）：To characterize good configurations of a given space is well studied in cording theory, design theory and other subjects. Our main purpose is to find good configurations of a space and give relationships between these theories.
In this research, we studied a configuration which have small number of distinct distances. We got some results about relationships between configurations and their substructures by relationships between configurations and their discrete structures.

研究分野：離散幾何学

キーワード：距離集合　離散幾何　部分構造　点の配置

1．研究開始当初の背景

与えられた空間におけるよい点の配置を考えること（=よい部分集合を見付けること）は符号理論やデザイン理論など様々な枠組みで行われている．それぞれの枠組みでよい配置を考えること，また，よい配置を通して枠組み間の関係を見出していくことは本研究分野における最大の目的であるといえる．その中で，Erdös(1946)に端を発して，現れる距離の個数が少ない配置に関する研究も行われてきた．d 次元ユークリッド空間における n 点部分集合 X の中に丁度 k 種類の距離が現れるとき，X を k-距離集合という．距離の種類 k と次元に対して多くの頂点数 n を持つようなものを特徴付けることは，距離集合における最大の目的であるといえる．具体的には，「d，k を固定して取り得る点の個数 n の上界を与えること」，「具体的に与えられた d, k に対して最大の頂点数を求め，最大のものを分類すること」，「最大頂点数に近い k-距離集合を特徴付けること」などの問題がある．

一般に，k-距離集合であれば完全グラフの k 色での辺着色を対応させることができる．特に，k=2 の場合単純グラフで対応付けできる．単純グラフとその補グラフのペアに対して，対応する 2-距離集合の無限系列（連続変形で写りあう）が存在し，その中で次元が極小な2つの2-距離集合が存在することが知られている．また，その極小次元の和は n-1 以上であることが知られている(n はグラフの位数)．ここで，極小次元は n-2 以下であるが，極小次元が n-3 以下になるグラフは稀でありそのようなグラフ，または対応する 2-距離集合の特徴付けが望まれている．

2-距離集合と単純グラフの関係が見出されている一方で，3 以上の k に対して，完全グラフの着色と k-距離集合との関係については，対応する連続変形などを含めてほとんど何も分かっていないのが現状である.（着色がよい対称性を持つときに，一部既存の結果がある.）

2．研究の目的

配置のよさと付随する代数構造のよさは双方向的なものである．よい代数構造を基によい配置を構成し，そのような配置を特徴付けることは自然であり，先行研究も多い．本研究における最大の目的は，代数構造を仮定しない配置の研究を通して，結果的によい配置はよい代数構造が背景にあることを導き，代数構造のよさを配置理論の言葉で表現することである．

特に，よい配置の部分構造に着目することで，よい配置を特徴付けることが本研究の最大の特色である．

3．研究の方法

k-距離集合を完全グラフの k 色での辺着色に対応させ，その部分構造を捉えることが本研究の最大の特色である．

これまでの距離集合の分類問題は，次元を固定し，更に非同型なものが有限個である場合についてのみ考えられてきた．一見，無関係に見える２つの配置についても，次元を固定せずにその配置を捉えることで，距離の関係を保ったまま連続変形で移り合うことがある．このように，連続変形（無限系列）を用いて距離集合を捉えることで，より小さな頂点数での距離集合の特徴づけが可能になると考えている．

4．研究成果

（１）Ramsey number の一般化について

Complementary Ramsey number とは通常の Ramsey number の定義における「クリーク数」を「独立数」に置き換えたものである．2 色での辺着色は通常の Ramsey number と一致するが，3 色以上を用いた場合，状況は変わってくる．この数により，n-点 k-距離集合が部分集合として m-点 (k-1)- 距離集合を含むことが保証される m の値が与えられる．東北大学の宗政氏との共同研究により，「よい組合せデザイン (=class uniform resolvable design)」が与えられたとき，関係する complementary Ramsey number が定まることが分かった．（class uniform resolvable design はラテン方陣や Kirkman triple system など，よく知られている組合せ構造を含んだ概念である．）無限系列で知られている class uniform resolvable design も存在することから，complementary Ramsey number も無限系列のパラメータに対し与えられることが分かった．本結果の空間の配置問題への応用についてはまだ研究段階であるが，本研究課題の目標であった，配置とその部分構造を解明する一つの道具を与えることができたと考えている．

（２）円周，直線上の距離集合について

平面上の凸集合に関する研究は Erdös (1946)，Altman(1963)，Erdös -Fishburn (1996) らにより研究されているが，当然成り立つだろうと思われているところと，実際証明されている部分とのギャップが大きいのが現状である．大雑把にいえば，平面上の凸集合におけるよい（=十分大きい頂点数を持つ）k-距離集合は正(2k+1)-角形の部分集合か正(2k)-角形の部分集合

であるということを示したい．しかし，現状では n=2k+1，または n=2k のときに示されているだけで，n=2k-1 のときですら Erdös -Fishburn の予想として残っている．円周上で考えることで，凸集合の研究の足掛かりにしたいというのが，本研究のきっかけである．
直線，円周は一番単純な空間であるといえるが，その分強い結果を得ることができた．特に，n 点 k-距離集合に対して，頂点数が f(k) 点より多いとすると（f(k)の値はおおよそ 4k/3)，正(2k+1)-角形の部分集合か正(2k)-角形の部分集合であるということが分かった．この評価の改良の余地は少しだけ残されているが，ほぼ最良であることが分かる．特に，この結果により有限のところの分類がほぼ完成したことになる．また空間の特質もあって， additive number theory と関わりを見出すこともできた．これらについて，現在，熊本大学の籾原氏と共同で継続して研究を行っている．

（３）グラフの 2-距離集合としての空間への埋め込みについて
Petersen graph (n=10)の極小 2-距離集合について，一方は 4 次元空間に実現でき，その構造についてもよく知られているが，もう一つの極小 2-距離集合の構造(d=5)についてはよく知られていなかった (Maehara(2013))．本研究において，この構造を明らかにした．特に，その facet はグラフの 5-cycle，6-cycle に対応していて計 22 個あることを示した．この結果も，部分構造を上手く捉えることで全体を捉えることが出来たよい例であり，本研究課題の特色が活かされた結果であるといえる．
また，完全多部グラフに対し，極小次元が n-3 以下になるための必要十分条件を与え，極小次元を完全多部グラフのパラメータを用いて表示した．更に，極小 2-距離集合が同一球面上にあるための必要十分条件も与えた．

（４）2-距離集合の球面性について
各次元で最大頂点数を与える 2-距離集合を最大 2-距離集合と呼ぶことにする．8 次元までの最大頂点数は与えられていて，最大 2-距離集合のほとんどが球面上の 2-距離集合になっている．本研究では，非球面に限定した 2-距離集合における最大頂点数を求め，最大 2-距離集合を分類し，それらの構造を明確にした．その中で最大なもの共通に見られる特徴（直交性）を見付け，その条件下で最大頂点数がどの程度大きくなり得るか考察した．そこで，直交性を持つ 2-距離集合は，知られている上界に近い頂点数を持つことができないことを示した．本結果は，愛知教育大学の野崎氏との共同研究による．

（５）Spherical shell の共通部分の直径の評価について
3 次元空間上で 3 つの球を考えるとき，（交われば）それらは１点または２点で交わる．この半径や中心に少しの自由度を持たせると，それらは spherical shell の共通部分として現れる．この部分空間の直径を考えることは，中心と半径に誤差を含む場合の交点の誤差の評価を与えることに繋がる．本研究ではこの直径を評価し，距離集合の分類問題への応用を与えた．また，ここでは，高次元球に関する同様の結果についても考察している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）
（１）篠原雅史，宗政昭弘，Small complementary Ramsey numbers, 応用数学合同研究集会報告集, 2013, 128-131 （査読なし）.
（２）野崎寛，篠原雅史，距離集合における点の配置問題とグラフ，数理解析研究所講究録, 2013(1844), 39-49 （査読なし）.
（３）Hiroshi Nozaki, Masashi Shinohara, A geometrical characterization of strongly regular graph, Linear algebra and its applications, 2012 (437), 2587-2600 （査読有）.

〔学会発表〕（計１６件）
（１）篠原雅史，平面上の距離集合と正多角形，数理情報科学さくらセミナー，2015 年 3 月（鹿児島大学）.
（２）篠原雅史，Diameter bounds for the intersections of spherical shells，研究会「直観幾何学」, 2015 年 3 月（熊本大学）.
（３）篠原雅史，平面上の距離集合と正多角形，熊本組合せ論研究集会, 2015 年 1 月（熊本大学）.
（４）Masashi Shinohara，Interval methods for a classification of three-distance set，Eighth Shanghai conference on combinatorics，2014 年 5 月（中国）.
（５）Masashi Shinohara，Akihiro Munemasa，A new generalization of Ramsey number R(s,t)，Sixth discrete geometry and algebraic combinatorics conference，2014 年 4 月（アメリカ）.
（６）篠原雅史，ラムゼー数の新しい一般化について，数理情報科学さくらセミナー，

2014年3月（鹿児島大学）.
（７）篠原雅史，2-距離集合の連続変形とPetersen graph の空間への埋め込みについて，研究会「直観幾何学」，2014年2月（熊本大学）.
（８）篠原雅史，On complementary Ramsey numbers，Hakata Workshop 2014～Discrete Mathematics and its Applications～，2014年2月（福岡）.
（９）篠原雅史，宗政昭弘，Small complementary Ramsey numbers，応用数学合同研究集会，2013年12月（龍谷大学）.
（１０）篠原雅史，宗政昭弘，Complementary Ramsey number について，離散数学とその応用研究集会2013，2013年8月（山形）.
（１１）篠原雅史，Complementary Ramsey number について，東北大学組合せ論セミナー，2013年5月（東北大学）.
（１２）篠原雅史，距離集合の分類と構成，第９回組合せ論若手集会（招待講演），2013年3月（慶應義塾大学）.
（１３）篠原雅史，2-distance set の変形とその極小次元，九州大学組合せ論セミナー，2013年3月（九州大学）.
（１４）Masashi Shinohara，On spherical and non-spherical two- distance set，Shanghai conference on algebraic combinatorics，2012年8月（中国）.
（１５）篠原雅史，距離集合における点の配置問題とグラフ，RIMS 共同研究「デザイン、符号グラフおよびその周辺」，2012年7月（京都大学）.
（１６）篠原雅史，完全多部グラフに対応する 2-距離集合について，１日離散幾何研究集会，2012年6月（東京理科大学）.

６．研究組織

(1)研究代表者

篠原雅史（SHINOHARA，Masashi）
滋賀大学・教育学部・講師
研究者番号：70432903