様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　５ 月 １８ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４００８１

研究課題名（和文）非線形分散型方程式の特異性形成の解析

研究課題名（英文）Analysis of singularity formation for nonlinear dispersive equations

研究代表者
前田　昌也（Maeda, Masaya）

千葉大学・理学（系）研究科（研究院）・助教

研究者番号：４０６１５００１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形分散型方程式の爆発解やソリトン解の時間大域挙動の解析をおこなった。空間的に集中する解の構成としては岸本氏とともに空間周期的なザカロフ方程式の爆発解の構成ならびに鈴木氏とともに細い領域で短い線状に集中する定常非線形シュレディンガー方程式の解の構成を行った。またソリトン解の時間大域挙動の研究としてはCuccagna氏とともに高速で移動するソリトンの漸近安定性解析を行った。特にソリトンの解析の結果としてハミルトン構造に着目した解析力学的手法の発展が得られ今後の非線形分散型方程式の解析に役に立つと期待される。

研究成果の概要（英文）：In this research, we have studied the asymptotic behavior of blow-up solution and solitons of nonlinear dispersive equations. In particular, with Kishimoto, I have constructed a blow-up solution for Zakharov equation on a torus and with Suzuki, I have constructed a solution for stationary nonlinear Schrodinger equation in a thin domain which concentrated on a short line. Moreover, with Cuccagna, I have studied the asymptotic stability of fast speed soliton. By the analysis of the soliton we have developed a new method wich is based on the Hamiltonian structure of the equation. This method is expected to give a new perspective for the analysis of general nonlinear dispersive equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線形分散型方程式　爆発解　ソリトン　漸近安定性

１．研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式、ザカロフ方程式などの非線形分散型方程式はこの２０年多大な関心を集めてきた。非線形分散型方程式で当初重要であった適切性の問題（解の存在と一意性、連続性）は特に集中して研究がなされ理解が進み、現在では解の時間大域挙動が中心的な研究テーマとなっている。解の時間大域挙動の中でも特にその特異性の形成（解が爆発すること）はこれらの方程式の記述する物理現象とも関係し、その構造の理解が求められている。
実際、ザカロフ方程式はプラズマ中のラングミュア乱流を記述するための近似方程式であり、特異性の形成がラングミュア乱流におけるキャビテーションに対応する。このことからも非線形分散型方程式における特異性形性の解析の重要さが伺える。
しかしながら、現在までのところ非線形分散型方程式の爆発解の挙動はよくわかっているとはいいがたい。
実際、爆発解の構造がよくわかっているといえるのは臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の場合だけであり、３次元ザカロフ方程式の場合、爆発解の存在すら証明されていない。
また、パラメータのついた非線形分散型方程式の定常問題においてパラメータの極限において定常解が集中する現象も数学物理のみならず数理生物学の分野から関心がもたれている。

２．研究の目的

本研究では（１）ザカロフ方程式の爆発解の構成と安定性の解析、（２）非線形シュレディンガー方程式の定常解の集中現象ならびに（３）ソリトン解の漸近安定性について調べることを目的とする。

（１）研究の背景で述べたようにザカロフ方程式が導入されたのはその爆発解から物理現象を議論するためであった。それゆえにザカロフ方程式の爆発解の存在ならびに安定性などの性質を解明することが重要である。ここで爆発解の安定性とは爆発解の近傍の解が爆発するということである（もしくは爆発する初期値の集合が適当な関数空間の位相で開集合であること）。

（２）定常シュレディンガー方程式にプランク定数、拡散係数、領域の幅、質量の大きさなどパラメータを入れて考えることは多い。このとき、パラメータを無限大もしくは0に近づけると定常解が一点に集中することがあり、これを解の集中現象と呼ぶ。解の集中現象は準古典近似や反応拡散方程式など広範囲に見られる。本研究では集中現象において点だけでなく線状に集中する新しいタイプの解の存在を模索する。

（３）特異性の形成とソリトン解の漸近安定性は一見関係ないように思えるが、臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の場合、擬共形変換によってソリトン解は爆発解に変換され、爆発解はソリトン解に変換される。このことにより爆発解の近傍の解の解析はソリトンの漸近安定性の研究に移される。実際、ブルガンとワンは臨界べきをもつ非線形シュレディンガー方程式の爆発解をこの手法により構成している。
一般のソリトン解の漸近安定性の証明が難しい一つの理由はソリトン解が線形化作用素に中立安定な固有値をもつことがあるため、線形解析だけでは足りないことにある。本研究では中立固有値の取り扱いをノーマルフォームの議論を通じて発展させることを目指す。

３．研究の方法

本研究ではザカロフ方程式の爆発解を岸本氏（京都大学）と、細い領域における集中解の構成を鈴木氏（茨城大学）と、またソリトンの漸近安定性解析の研究を Cuccagna 氏（トリエステ大学）と共同で行った。

４．研究成果

（１）．２次元周期境界条件下でのザカロフ方程式の爆発解の構成。岸本展氏（京都大学）との共同研究（５．主な発表論文３の成果）。
全空間における２次元３次の非線形シュレディンガー方程式の爆発解はソリトン解の疑共形変換により得られる。それに対し、全空間における２次元ザカロフ方程式は完全な疑共形変換をもたないため、爆発解はソリトン解から直接は得られない。グランゲタスとメルルはその問題を疑共形変換を施すとザカロフ方程式になる定常問題を考えることによって構成した。
周期境界条件下では小川と堤が非線形シュレディンガー方程式の爆発解を全空間の爆発解を切り取って貼り付けることによって構成した。一方でザカロフ方程式の場合この方法をそのまま適用しようとすると微分の損失の問題が発生する。また、切り貼りの議論で重要であった解の指数減衰はザカロフ方程式の波動部分にはない。これらのことをわれわれは修正エネルギー方ならびに波動部分の有限伝播性を用いることによって解決した。
爆発解の安定性に関しては現在研究が進行中である。

（２）細い領域上の非線形楕円型方程式の解の集中。鈴木香奈子氏（茨城大）との共同研究（５．主な発表論文２の成果）。
非線形シュレディンガー方程式の定常問題を考えると非線形楕円型方程式となる。この

ときプランク定数はラプラシアンの前の小さなパラメータとなり問題は特異極限問題となる。このような特異極限問題は数理生物学の方面からも登場し、プランク定数は拡散係数に対応する。領域を固定する場合、その最低エネルギー解は境界に集中することがニーと高木の研究などにより知られていたが、領域が拡散係数に応じて変化する場合の最低エネルギー解の集中に関する研究は少なかった。
我々は拡散係数が小さくなるときに細い線状になる領域を考えその最低エネルギー解が領域と直交する短い線状に集中することを示した。一点ではなく一次元以上の多様体上に集中する解の例は多くはなく、また非線形シュレディンガー方程式の爆発解の研究でも球面などで爆発する解が近年発見されているため、このような解をみつけることは意義があったと思われる。

（3）ポテンシャル中を高速で移動するソリトン解の漸近安定性。シピオクッカーニャ氏（トリエステ大学）との共同研究（5．主な発表論文1の成果）。
前述のとおりソリトン解の漸近安定性と爆発解には深いかかわりがある。ここではポテンシャルつきの非線形シュレディンガー方程式のソリトン解を考える。ポテンシャル中を運動するソリトン解はプランク定数が小さいときにはニュートン方程式に従う質点のような挙動を示し、また大きなポテンシャルと衝突すると量子力学的なトンネル効果を起こすことがあり、古典と量子力学両方の性質を併せ持つためそれ自体大変興味深いと思われる。
ポテンシャルがない場合、ソリトンは等速直線運動をし、とまっているソリトンと等速直線運動をしているソリトンはガリレイ変換によって移りあう。我々は急減少するポテンシャルがある場合にポテンシャルがない場合のソリトンを初期値とする解の挙動を考察した。高速で移動する場合、ソリトンとポテンシャルの相互作用は弱いと考えられるのでこの場合ソリトンはほぼ等速直線運動をし、ソリトンは漸近安定となることが考えられる。
前述のようにソリトンの漸近安定性解析で重要となるのは線形化方程式の線形作用素の中立固有値の扱いである。これらの固有値の成分は線形化解析だけでは減衰は起こさない。ゆえに非線形相互作用も含めた詳細な解析が必要となる。特にこれらの成分の満たす方程式の主要部を導出するために解析力学的な手法、ダルブーの定理やバーコフ標準形の議論を用いる。これらの議論を行うと中立固有値の成分の減衰を得ることができる。このような解析力学的手法を用いた議論は爆発解の安定性解析においても役に立つのではないかと考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　5 件）

1. Cuccagna, Scipio, Maeda, Masaya “On weak interaction between a ground state and a non-trapping potential”, J. Differential Equations 査読有 256 (2014), no. 4, 1395–1466. doi:10.1016/j.jde.2013.11.002
2. Maeda, Masaya, Suzuki, Kanako “Concentration of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem in thin domains”, J. Math. Anal. Appl. 査読有 411 (2014), no. 2, 465–484. doi:10.1016/j.jmaa.2013.09.036
3. Kishimoto, Nobu; Maeda, Masaya “Construction of blow-up solutions for Zakharov system on T2”, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 査読有 30 (2013), no. 5, 791–824. doi:10.1016/j.anihpc.2012.09.003
4. Maeda, Masaya, Masaki, Satoshi “An example of stable excited state on nonlinear Schrödinger equation with nonlocal nonlinearity” Differential Integral Equations 査読有 26 (2013), no. 7-8, 731–756. http://projecteuclid.org/euclid.die/1369057815
5. Maeda, Masaya “Stability of bound states of Hamiltonian PDEs in the degenerate cases”, J. Funct. Anal. 査読有 263 (2012), no. 2, 511–528. doi:10.1016/j.jfa.2012.04.006

〔学会発表〕（計　9 件）

1. 前田昌也, “Existence and asymptotic stability of quasi-periodic solution of discrete NLS with potential”, 松山解析セミナー, 2015 年 2 月 7 日, 愛媛大学(愛媛県松山市）.
2. 前田昌也, “On small energy stabilization in the continuous and discrete NLS with potential”, 微分方程式の総合的研究, 2014 年 12 月 20 日, 京都大学（京都府京都市）.
3. 前田昌也, “On small energy stabilization in the NLS with a trappig potential”, 第 31 回九州における偏微分方程式研究集会, 2014 年 1 月 29 日, 福岡大学メディカルホール（福岡県福岡市）.
4. 前田昌也, “Dynamics of solution related to solitons in nonlinear Schrodinger equations”, クロスボーダーシンポジウム, 2014 年 1 月 13 日, 北海道大学（札幌市）.

5. **前田昌也**, "On small energy stabilization in the NLS", **第2回岐阜数理科学研究会**, 2013年9月18日, **飛騨高山まちの博物館（岐阜県高山市）**.
6. **前田昌也**, "Nonexistence of minimal mass blow-up solution of Zakharov system on 2D torus", **第5回名古屋微分方程式研究集会**, 2013年3月13日, **名古屋大学（愛知県名古屋市）**.
7. **前田昌也**, "Nonexistence of minimal mass blow-up solution of Zakharov system on 2D torus", **若手のための偏微分方程式と数学解析**, 2013年2月15日, **福岡大学セミナーハウス（福岡県福岡市）**.
8. **前田昌也**, "Nonexistence of minimal blow-up solution of Zakharov system on 2D torus", **第7回非線形偏微分方程式と変分問題**, 2013年2月8日, **首都大学東京（東京都八王子市）**.
9. **前田昌也**, "On the solution of nonlinear elliptic equation in a thin domain", **第37回偏微分方程式札幌シンポジウム**, 2012年8月26日, **北海道大学（北海道札幌市）**.

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

○取得状況（計　0 件）

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
前田　昌也（Masaya Maeda）
千葉大学理学研究科助教
研究者番号：40615001