様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号：２４７４００８３

研究課題名（和文）ゲーム理論において現れる不連続な非線形項を持つ放物型方程式系の研究

研究課題名（英文）Study of parabolic systems with discontinuous nonlinearities arising in game theory

研究代表者
出口　英生（Deguchi，Hideo）

富山大学・大学院理工学研究部（理学）・准教授

研究者番号：３０４３２１１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：ゲーム理論において、ナッシュ均衡の概念はゲームの解概念として重要な役割を果たしてきたが、複数のナッシュ均衡が存在する場合、プレイヤーはどのナッシュ均衡をプレイすべきか？という問題に直面する。これを均衡選択の問題という。この問題を扱うために、Hofbauer (1999)は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で最適反応動学（一部のプレイヤーが現状に対する最適な戦略をとることで社会が動いていくという動学）を修正し、ナッシュ均衡のコンパクト開位相の意味での漸近安定性を用いて空間支配の概念を提案した。本研究では、空間支配による均衡選択の基準を調べ、他のアプローチとの比較を行った。

研究成果の概要（英文）：The concept of Nash equilibrium has played a central role as a solution concept in game theory. However, when a game has multiple Nash equilibria, the players face a problem which equilibrium they should play. To treat this problem, Hofbauer (1999) introduced the concept of spatial dominance by means of the stability of a constant stationary solution, which corresponds to a Nash equilibrium, to a reaction-diffusion system. That a Nash equilibrium is spatially dominant means that if it initially prevails on a large finite part of the space, then it takes over the whole space in the long run. In this research project we investigated the selection criterion of spatial dominance.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ゲーム理論　放物型方程式　不連続な非線形項　安定性

１．研究開始当初の背景
ナッシュ均衡は、ゲームに参加している各プレイヤーが、他のプレイヤーの戦略を所与として、自分の利得が最大となる戦略をとっている状態である。ゲーム理論において、ナッシュ均衡の概念は解概念として重要な役割を果たしてきたが、現実の人々ははたしてナッシュ均衡を実際にプレイするだろうか？この問題は、特に、複数のナッシュ均衡が存在する場合には深刻なものとなる。なぜなら、たとえ均衡がプレイされるということがわかっていたとしても、それぞれが別々の均衡がプレイされると思っていたとしたら実際には均衡がプレイされないからである。この問題を扱うために、Gilboa と Matsui (1991)は最適反応動学を導入し、この動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案した。最適反応動学は、一部の人々が現状に対する最適な戦略をとることで社会が動いていくという動学であり、不連続な非線形項を持つ常微分方程式系に対する初期値問題によって記述される。この動学の下で一意なナッシュ均衡は必ずしも漸近安定となるとは限らないが、このことは特に問題とはならない。なぜなら、それは社会の状態が必ずしも常に一点にとどまり続けるとは限らないということを意味しているにすぎないからである。このように、最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合はナッシュ均衡より自然で理にかなったゲームの解を与えているように思える。
また、複数のナッシュ均衡が存在する場合、どのナッシュ均衡がプレイされるかという問題を均衡選択の問題という。戦略数2の2人ゲームに対する均衡選択の重要な概念として、Harsanyi と Selten (1988)の危険支配の概念がある。ナッシュ均衡が危険支配的であるとは、ナッシュ均衡が実現しないかもしれないというプレイヤー共有のリスクが最小の状態であることを意味する。最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合は一般に複数のナッシュ均衡を含むので、均衡選択の問題の研究には適さない。このため、Hofbauer (1999)は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で最適反応動学を修正した。この動学は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題によって記述される。彼は、この動学の下でのナッシュ均衡のコンパクト開位相の意味での漸近安定性を用いて空間支配の概念を提案した。ナッシュ均衡が空間支配的であるとは、初期時刻に空間の大部分で他の均衡より優勢であれば、時間無限大でそれは全空間上で支配的となるということを意味する。空間支配的となるナッシュ均衡は高々一つであるので、存在が示せれば、均衡選択の基準になり得る。彼は、戦略数2の2人ゲームに対して空間支配アプローチによる均衡選択の基準と危険支配アプローチのそれとが一致することを証明した：

・J. Hofbauer, The spatially dominant equilibrium of a game, Annals of Operations Research 89(1999) 233-251.

全く異なる均衡選択アプローチによる結果が一致するのは非常に興味深い。以上の事から、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下でコンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合は、Gilboa と Matsui(1991)の解の欠点を補い、より理にかなったゲームの解となることが期待される。
国内外における当該研究の位置づけについては、Lakshmikantham（アメリカ合衆国）を中心に、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する境界値問題の解の理論的な存在性に関する研究が行われている。応用の面から見ると、Feireisl と Norbury による燃焼問題の観点からの不連続な非線形項を持つ放物型方程式の研究や、McKean によって提案された FitzHugh-Nagumo 方程式の区分的に線形なバージョンである不連続な非線形項を持つ放物型方程式系の研究等が盛んに行われている。しかしながら、日本では、理論の面からも応用の面からも不連続な非線形項を持つ放物型方程式系を研究している数学者の数は余り多くない。

２．研究の目的
プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下で、プレイヤーの集団の戦略分布は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題を満たす。本研究の目的は、この初期値問題の解の存在と一意性を研究することと、この動学の下でコンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案し、その妥当性を議論することである。

３．研究の方法
(1) プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学を記述する不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題の解の存在と一意性を研究する。R 上に分布したプレイヤーの集団を考える。プレイヤー間の局所的な相互作用は最適反応動学によって説明されると仮定する。最適反応動学は、一部のプレイヤーが現状に対する最適な戦略に移行するという状況をモデル化する。さらに、プレイヤーのランダムな移動は拡散によってモデル化されると仮定する。このとき、プレイヤーの集団の戦略分布は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題を満たす。下記の論文において、時間離散化による近似を用いることにより、戦略数nの対称2人ゲームの場合に生じる初期値問題の解の存在性を証明した：
[1] Hideo Deguchi, A reaction-diffusion system arising in game theory: existence of solutions and spatial dominance, preprint, 2015.

また、初期状態によってプレイヤーは複数の最適な戦略を持つので、一般に解の一意性は期待できない。下記の論文では、戦略数2の対称2人ゲームの場合を考え、優解劣解を構成し比較定理を証明することによって、解の一意性、非一意性のための十分条件を得た：
[2] Hideo Deguchi, Existence, uniqueness and non-uniqueness of weak solutions of parabolic initial-value problems with discontinuous nonlinearities, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A 135 (2005) 1139-1167.
上記2論文を出発点として一般のゲームの場合に生じる初期値問題の解の存在と一意性を研究する。

(2) プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下で、コンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合をゲームの新しい解として提案する。一意なナッシュ均衡が存在する場合と複数のナッシュ均衡が存在する場合とに分けて、どのような戦略分布の集合がコンパクト開位相の意味で漸近安定となるかを調べる。
① 一意なナッシュ均衡が存在する場合
Gilboa と Matsui (1991)は、最適反応動学の下で一意なナッシュ均衡が不安定となるゲームの例を与え、このゲームの場合、時間に関して周期的に変化する戦略分布が漸近安定となることを証明した：
・I. Gilboa and A. Matsui, Social stability and equilibrium, Econometrica 59 (1991) 859-867.
このように、一意なナッシュ均衡は必ずしも漸近安定となるとは限らないが、このことは特に問題とはならない。なぜなら、それは社会の状態が必ずしも常に一点にとどまり続けるとは限らないということを意味しているにすぎないからである。下記の論文では、同じゲームに対して、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下でも、時間に関して周期的に変化する戦略分布が漸近安定となることを証明した：
[3] Hideo Deguchi, Weak solutions of a parabolic system with a discontinuous nonlinearity, Nonlinear Analysis 71 (2009) e2902-e2911.
その証明において、下記の Hofbauer (1995) において構成された最適反応動学に対するリヤプノフ関数を用いた。
・J. Hofbauer, Stability for the best response dynamics, preprint, 1995.
そこで、上記論文[3]を手掛かりとし、一般のゲームに対して、最適反応動学の下で漸近安定となる戦略分布の集合は、プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学の下でもコンパクト開位相の意味で漸近安定となるかということを調べる。さらに、漸近安定となる戦略分布の集合上でのプレイヤーの期待利得と、一意なナッシュ均衡に従った場合の期待利得を比較することによって、漸近安定となる戦略分布の集合のゲームの新しい解としての妥当性を議論する。
② 複数のナッシュ均衡が存在する場合
まず、どのナッシュ均衡がプレイされるかという均衡選択の問題を考える。戦略数2の2人ゲームに対する均衡選択の重要な概念として、Harsanyi と Selten (1988)の危険支配の概念がある。上記論文[1]の中で、危険支配の概念の戦略数nの対称2人ゲームへの一般化である1/2支配の概念と空間支配の概念を比較し、1/2支配的なナッシュ均衡は空間支配的であることを証明した。本研究では、まず、1/2支配的なナッシュ均衡が存在しない場合の空間支配アプローチによる均衡選択の基準を調べる。その際、ある特定の不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対して、優解劣解を構成し、比較定理を証明することによって定数定常解がコンパクト開位相の意味で漸近安定となるための必要十分条件を得た下記の論文を出発点とする：
[4] Hideo Deguchi, Existence, uniqueness and stability of weak solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinearities, Monatshefte fuer Mathematik 156 (2009) 211-231.
さらに、他のアプローチによる均衡選択の基準との比較も行う。もちろん、必ずしも空間支配的なナッシュ均衡が存在するとは限らない。空間支配的なナッシュ均衡が存在しない場合 Hofbauer (1995)において構成された最適反応動学に対するリヤプノフ関数を手掛かりとし、コンパクト開位相の意味で漸近安定となる戦略分布の集合は存在するか？存在するならば、その集合上でのプレイヤーの期待利得と、ナッシュ均衡に従った場合の期待利得を比較することによって、漸近安定となる戦略分布の集合のゲームの新しい解としての妥当性を議論する。

４．研究成果
(1)1/2支配的なナッシュ均衡を持たない戦略数nの対称2人ゲームに対する空間支配性について研究を行った。特に、n=3の場合について考察し、1/2支配的でないナッシュ均衡が空間支配的となるための条件（空間支配的とならないための条件）を得た。また、純粋協調ゲームに対して一般に受け入れられた均衡選択の基準は、最大のナッシュ積をもつナッシュ均衡が好ましいというナッシュ積に基づくものである。Hofbauer (1999)は戦略数2のn人純粋協調ゲームに対してナッシュ積の概念と空間支配の概念の関係を調べ、最大のナッシュ積をもつナッシュ均衡が空間支配的となることを証明した。本研究では、戦略数nの2人純粋協調ゲームに対しても、最大のナッシュ積をもつナッシュ均衡が空間支配的となることを証明した。さらに、一般の戦略数nの2人ゲームに対する空間支配性について研究を行い、

ナッシュ均衡が空間支配的となるための条件を得た。

(2)プレイヤーのランダムな移動を組み込む形で修正された最適反応動学は、不連続な非線形項を持つ放物型方程式系に対する初期値問題によって記述される。Hofbauer (1999)は、簡単のため、拡散係数は戦略と独立であると仮定した。そこで、本研究では、拡散係数が戦略に依存する場合のナッシュ均衡の支配関係について研究を行った。特に、戦略数2の対称2人ゲームの場合を考察し、2つの均衡をつなぐ進行波解が存在するための必要十分条件を得た。さらに、進行波解の速度を求め、進行波解に沿ってどちらの均衡が支配的となるかを調べた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

<u>Hideo Deguchi</u>, G. Hoermann and M. Oberguggenberger, The wave equation with a discontinuous coefficient depending on time only: generalized solutions and propagation of singularities, Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics, Operator Theory: Advances and Applications 231 (2013) 323-339.（査読有）
10.1007/978-3-0348-0585-8_18

〔学会発表〕（計　1　件）

<u>Hideo Deguchi</u>, The wave equation with a discontinuous coefficient depending on time only: generalized solutions and propagation of singularities, International conference "PDE, Microlocal and Time-frequency Analysis", University of Novi Sad, Serbia, September 7, 2012

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
出口　英生（Deguchi, Hideo）
富山大学・大学院理工学研究部（理学）・准教授
研究者番号：30432115

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：