様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2015
課題番号：２４７４００８８

研究課題名（和文）多重線形調和解析における有界性定理の精密化

研究課題名（英文）Sharp conditions on the boundedness of multilinear operators

研究代表者
冨田　直人（TOMITA, Naohito）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：１０４３７３３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：双線形フーリエマルチプライヤー作用素と双線形擬微分作用素に対する有界性の研究を行った．前者に対しては，有界性を保証するためのマルチプライヤーに課すべき滑らかさの条件をソボレフ空間の意味で決定した．後者に対しては，有界性を保証するための擬微分作用素のオーダーを決定した．また，これらの結果の最適性についても研究を行った．

研究成果の概要（英文）：I studied the boundedness properties of bilinear Fourier multiplier and pseudo-differential operators. To assure the boundedness, the smoothness condition for Fourier multipliers in the sense of Sobolev spaces and the order of pseudo-differential operators were determined. The sharpness of these results was also studied.

研究分野：解析学基礎

キーワード：多重線形作用素　フーリエマルチプライヤー　擬微分作用素

１．研究開始当初の背景

調和解析(実解析) の分野では，2000 年頃から線形の理論を多重線形の理論へと拡張する研究がメインテーマの一つとなっている．調和解析における線形から多重線形への理論の拡張は，単なる一般化などではなく，調和解析の問題として眺めても非常にチャレンジングであるし，また応用面から眺めても偏微分方程式論の発展の可能性を大いに秘めている．本研究では多重線形調和解析における有界性定理の精密化を目標とし，また最新の多重線形理論の偏微分方程式への応用を目指した.

２．研究の目的

（１）1 つ目の研究目的は, 双線形(多重線形)フーリエマルチプライヤーの有界性定理の精密化に関する研究を完成させることであった.

まず，問題意識を述べるために，線形の場合を考える．線形の理論の中にある Hörmander のマルチプライヤー定理が主張することは，線形のフーリエマルチプライヤーに対しては, ソボレフ空間の意味で n/2 を超える滑らかさ及び微分に対する減衰評価があれば，その作用素の有界性が保証されるというものである．ここで n は次元を表す.

次に双線形の場合を考えよう．Coifman と Meyer による双線形フーリエマルチプライヤーに関する仕事は，間違いなく画期的なものであるが，精密化すべき点は残っている．実際，有界性を保証するために用いられるマルチプライヤーの微分評価は，初期の彼らの証明では(4n + 1)次まで，その後(2n + 1)次までに減らされたが, それでも線形の理論から期待されるオーダーからはほど遠い．すると，素朴な疑問として“ 双線形フーリエマルチプライヤー作用素が有界になるためには，いったい何次までの微分評価が必要か？”が生まれる．この問題に対し申請者は，2010 の論文において，双線形版の Hörmander のマルチプライヤー定理を与え，その系として(n + 1)次までの微分評価で双線形作用素の有界性を導くことに成功した．そしてこの(n + 1)次というオーダーは，双線形の場合には次元を 2n と理解すべきであるから, 次元の半分+ 1 = (2n)/2 + 1 = n + 1 という線形の場合から期待される自然なオーダーである.

しかし，2010 年の研究では，解決すべき問題が多く残っていた．例えば，マルチプライヤー作用素の有界性は, L^p×L^q → L^r, 1/p+1/q=1/r, 1<p,q,r<∞, のみを扱っていた．しかし, 双線形(多重線形)特有の現象として，p, q が 1 以上であっても, 移り先の空間の指数が r が 1 を下回る状況が起こりうるし， p, q が 1 以下の場合に Hardy 空間に置き換えられるかなど，このような状況の下での有界性定理の精密化については未解決であったため，明らかにしたかった.

（２）2 つ目の研究目的は，双線形擬微分作用素の有界性を保証する擬微分作用素のオーダーを決定することであった．研究開始当時は，ρ=1 の場合にのみ, クリティカルなオーダーのが知られていたため，ぜひとも解決したかった.

３．研究の方法

上で述べた(1), (2)の問題共に，Littlewood-Paley の不等式と, Hardy 空間におけるアトム分解を基本として研究を行った．そして，次の項目で述べるように，興味深い研究成果を得ることができた.

４．研究成果

（１）双線形フーリエマルチプライヤーに対しては，その有界性を保証するための滑らかさの条件をソボレフ空間の意味で完全に決定することに成功した（[雑誌論文，3，5，6] ）．また，ソボレフ空間をベゾフ空間に置き換える研究も行った（[雑誌論文，7]）.

（２）双線形擬微分作用素に対しては，ρ=0 の場合には，有界性を保証する際の擬微分作用素のオーダーを完全に決定することに成功した（[雑誌論文，4]）.

(3) Flag paraproduct と呼ばれる特異性の強いフーリエマルチプライヤーに対し，3 線形の場合にはの有界性がなりたつ Hardy 空間の指数をある意味で完全に決定した（[雑誌論文，1]）.

（４）弱い滑らかさの仮定の下での多重線形フーリエマルチプライヤー作用素に対する重み付きノルム不等式を得ることに成功した（[雑誌論文，2，8]）.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 8 件）

(1) A. Miyachi and N. Tomita, Estimates for trilinear flag paraproducts on L^∞ and Hardy spaces, Mathematische Zeitschrift 282 (2016), 577-613, 査読有. DOI:10.1007/s00209-015-1554-0

(2) M. Fujita and N. Tomita, A counterexample to weighted estimates

for multilinear Fourier multipliers with Sobolev regularity, Journal of Mathematical Analysis and Applications 409 (2014), 630-636, 査読有.
DOI:10.1016/j.jmaa.2013.07.041

(3) A. Miyachi and N. Tomita, Boundedness criterion for bilinear Fourier multiplier operators, Tohoku Mathematical Journal 66 (2014), 55-76, 査読有.
DOI:10.2748/tmj/1396875662

(4) A. Miyachi and N. Tomita, Calderón-Vaillancourt type theorem for bilinear operators}, Indiana University Mathematics Journal 62 (2013), 1165-1201, 査読有.
DOI:10.1512/iumj.2013.62.5059

(5) A. Miyachi and N. Tomita, Minimal smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, Revista Matemática Iberoamericana 29 (2013), 495-530, 査読有.
DOI:10.4171/rmi/728

(6) L. Grafakos, A. Miyachi and N. Tomita, On multilinear Fourier multipliers of limited smoothness, Canadian Journal of Mathematics 65 (2013), 299-330, 査読有.
DOI:10.4153/CJM-2012-025-9

(7) N. Tomita, A remark on multilinear Fourier multipliers satisfying Besov estimates, RIMS Kôkyûroku Bessatsu 33 (2012), 111-121, 査読有.

(8) M. Fujita and N. Tomita, Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers, Transactions of the American Mathematical Society 364 (2012), 6335-6353, 査読有.
DOI:10.1090/S0002-9947-2012-05700-X

〔学会発表〕（計 24 件）

(1) 冨田直人, 多重線形フーリエマルチプライヤーについて, Saga Workshop on Partial Differential Equations, 佐賀大学, 2016 年 3 月 22 日.

(2) 冨田直人, L. Grafakos, 宮地昌彦, H.V. Nguyen, Multilinear Fourier multipliers with Sobolev regularity, 日本数学会年会, 筑波大学, 2016 年 3 月 16 日－19 日.

(3) N. Tomita, On the boundedness of multilinear Fourier multiplier operators, Harmonic analysis and its applications in Matsumoto 2016, Winter, February 15－19, 2016.

(4) 冨田直人, 多重線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性について, 浜松偏微分方程式研究集会, 静岡大学, 2015 年 12 月 22 日－23 日.

(5) N. Tomita, On the boundedness of multilinear Fourier multiplier operators, Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2015, Waseda University, November 27－29, 2015.

(6) 冨田直人, Flag paraproduct の Hardy 空間上での有界性について, 広島数理解析セミナー, 広島大学, 2015 年 11 月 13 日.

(7) 冨田直人, 最小の滑らかさの仮定の下での多重線形フーリエマルチプライヤーについて, 調和解析駒場セミナー, 東京大学, 2015 年 10 月 3 日.

(8) 冨田直人, 宮地晶彦, Flag paraproduct の Hardy 空間上での有界性について, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月 13 日－16 日.

(9) 冨田直人, Flag paraproduct の Hardy 空間上での有界性について, 微分方程式セミナー, 名古屋大学, 2015 年 5 月 25 日.

(10) 冨田直人, 特異性の強い多重線形フーリエマルチプライヤーについて, 微分方程式セミナー, 大阪大学, 2014 年 10 月 17 日.

(11) N. Tomita, Flag paraproducts on Hardy spaces, 2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Mudanjiang Normal University (Mudanjiang, China), July 11－14, 2014.

(12) 冨田直人, 特異性の強い多重線形フーリエマルチプライヤーについて, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大学, 2014 年 5 月 31 日.

(13) N. Tomita, On the Calderón-Vaillancourt type theorem for

bilinear pseudo-differential operators, Nonlinear Dispersive Equations and Harmonic Analysis, Kyoto University, January 14, 2014.

(14) 冨田直人, 多重線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性について 1,2, 調和解析セミナー, 日本女子大学, 2013 年 12 月 25 日－27 日.

(15) 冨田直人, 双線形フーリエマルチプライヤーが有界作用素になるための滑らかさの条件について, 実解析的手法と偏微分方程式ワークショップ, 東北大学, 2013 年 11 月 9 日.

(16) N. Tomita, Smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, 1st East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, Seoul National University, October 24－26, 2013.

(17) 冨田直人, 双線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性について, 特別講演(函数方程式分科会), 日本数学会, 愛媛大学, 2013 年 9 月 24 日－27 日.

(18) 冨田直人, 双線形フーリエマルチプライヤーの滑らかさの条件について, 調和解析駒場セミナー, 東京大学, 2013 年 7 月 20 日.

(19) 冨田直人, 双線形擬微分作用素に対する Calderón-Vaillancourt 型の定理について, 線形および非線形分散型方程式の研究, 数理解析研究所 (京都大学), 2013 年 5 月 20 日－23 日.

(20) 冨田直人, 双線形擬微分作用素に対する Calderón-Vaillancourt 型の定理について, 調和解析セミナー, 東京大学, 2012 年 12 月 25 日－27 日.

(21) N. Tomita, Calderón-Vaillancourt type theorem for bilinear operators, Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2012, Tokyo Metropolitan University, November 16－18, 2012.

(22) N. Tomita, Sharp estimates for bilinear Fourier multipliers, China-Japan Joint Meeting on PDE at Yanji, Yanbian University (Yanji, China), September 10, 2012.

(23) 冨田直人, Sharp estimates for bilinear Fourier multiplier operators, 実函数論函数解析学合同シンポジウム, 東京理科大学, 2012 年 8 月 6 日－8 日.

(24) N. Tomita, Sharp estimates for bilinear Fourier multipliers, Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators, Aalto University (Helsinki, Finland), June 25－30, 2012.

６．研究組織

(1)研究代表者

冨田直人（TOMITA NAOHITO）

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号： 10437337