

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 15 日現在

機関番号：32601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740089

研究課題名(和文)粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の特異摂動問題

研究課題名(英文) Singular perturbation problems for viscous Hamilton-Jacobi equations

研究代表者

市原 直幸 (ICHIHARA, Naoyuki)

青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号：70452563

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式とそれに付随する確率最適制御問題について考察した。具体的には、実数パラメータを持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の族に対して、パラメータのある臨界値付近で方程式の解の無限遠方における漸近挙動が急激に変化することを明らかにした。また、対応する最適制御問題に対する最適軌道の再帰性・過渡性は臨界値を境に反転することを示した。さらに、この現象は方程式の非線形項の増大度に大きく依存することを示した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied viscous Hamilton-Jacobi equations, a class of nonlinear partial differential equations, and associated stochastic optimal control problems. More specifically, for a family of viscous Hamilton-Jacobi equations with real parameter, we showed that the asymptotic behavior, at infinity, of solutions changes drastically in the vicinity of a certain critical point of parameter. Furthermore, we also proved that the recurrence/transience of the optimal trajectory for the associated stochastic optimal control problem also changes at this critical point, and that this phenomenon relies heavily on the choice of nonlinearity in gradient of the equation.

研究分野：確率論

キーワード：確率最適制御

1. 研究開始当初の背景

粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する漸近問題については、これまでも様々な研究がなされてきたが、極限方程式の解の一意性を前提とした議論が主流だったように思われる。しかしながら、粘性消滅型の特異摂動問題など、興味ある極限方程式の多くは粘性解の意味で一意性が成り立たず、この種の漸近問題を考察するためには既存の枠組みを超えた新しいアプローチが必要になる。特に、特異摂動問題に関しては幾つかの示唆的な研究がある以外は先行研究が見当たらず、現在でも良く理解されているとは言い難い。

2. 研究の目的

粘性消滅型の特異摂動問題を含む漸近問題全般を考察の対象とし、極限方程式に一意性がない場合の解の漸近挙動を解明することを最終目標とする。そのために、これらの問題に対する粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の諸性質を調べる。さらに、解の収束スピードも含む精密な漸近評価を得ることも目指す。

3. 研究の方法

粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の解析的な性質と、方程式に付随する確率最適制御問題の確率論的な諸性質を組み合わせた議論を用いる。

4. 研究成果

平成24年度は、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する臨界性理論を扱った。考察の対象となるのはエルゴード型粘性ハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれる非線形固有値問題である。本研究において、実数パラメータを持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の族を考え、パラメータの値によって方程式の解の性質、特に空間遠方での解の増大度が大きく変化することを示した。具体的には、ある閾値が存在して、パラメータがこの閾値を超えると解は1次の増大度を持ち、この閾値以下のときは高々対数関数の増大度を持つことを証明した。さらに、対応するエルゴード型確率制御問題に関して、上で求めた閾値の前後で最適制御過程の再帰性・過渡性が変化することを証明した。証明には確率版リヤプノフの方法を用いた。解の増大度の評価と方程式の凸構造をうまく利用することで、再帰性の判定に有用なリヤプノフ関数を具体的に構成することができた。ここで扱った方程式に含まれる実数パラメータを限りなく大きくしたときの極限を考えることで、本質的には粘性消滅型の特異摂動の問題が現れることに注意する。平成25年度は、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の一般化主固有値について研究し、それをもとにして平成24年度に考察した粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する臨界性理論の一般化を試みた。一般化主固有値に関しては、確率最適制御問題に付随して現れるエ

ルゴード型粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対して一般化主固有値の概念を新たに定義し、この値が確率最適制御問題の最適値と一致するための必要十分条件を求めた。方程式の線形性や関数解析的手法による結果を全く利用しない確率制御論的方法を用いたため、得られた結果は線形方程式だけでなく最適制御論的に重要な非線形方程式も統一的に扱うことができるようになった。上記の結果を踏まえ、実数パラメータを持つエルゴード型粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の族に対して、一般化主固有値およびそれに付随する固有関数の空間遠方での解の増大度がパラメータの値によって大きく変化することを示した。平成24年度の研究では、方程式の非線形項がちょうど2次増大の場合のみを考察したが、平成25年度の研究成果により方程式は必ずしも2次増大でなく一般に優線形であればよいことがわかった。さらに、非線形項の増大度に応じて方程式の定性的性質や最適制御過程の再帰性が決定的に異なるような具体例を空間2次元の場合に構成することができた。

平成26年度では、これまでに考察した粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する臨界性理論の離散版について研究した。具体的には、長時間平均型の評価関数を持つ離散時間のマルコフ決定過程を考え、評価関数の中に組み込まれた実数パラメータを変化させるとき、最適値や最適制御に関してある種の相転移現象が起こることを示した。評価関数が特別な形の場合には、上記の問題は統計物理に由来する離散型 homopolymer モデルと一致する。平成26年度の研究成果として以下の結果を得た。まず、最適化問題の最適値が、対応する最適性方程式の一般化固有値と一致することを示した。次に、最適性方程式の一般化固有関数を用いて最適化問題の最適フィードバック制御を具体的に構成した。さらに、問題中の実数パラメータにはある臨界値が存在し、その値の前後で最適軌道の長時間挙動(再帰性・過渡性)が変化することを示した。平成25年度以前ではこれらの問題に対する連続モデルを考察したが、平成26年度の研究により離散型モデルについてもある程度一般的な状況下で類似の結果が得られることがわかった。さらに、連続モデルの場合では得られていなかった臨界値に関する評価式も得ることができた。研究期間全体を通して、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の特異摂動問題およびそれに関連する漸近問題についての基礎的な成果を得ることができた。一方で、粘性消滅型の特異摂動問題に対しては、完全に解明できたとは言い難い。これについては今後の継続課題とする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6 件)

1. Naoyuki Ichihara, Phase transitions for controlled Markov chains on infinite graphs, 数理解析研究所講究録, 印刷中(査読なし)
2. Naoyuki Ichihara, The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 印刷中(査読あり) (DOI: 10.1016/j.anihpc.2014.02.003)
3. Naoyuki Ichihara, Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control, J. Math. Pures Appl. 100(3) 368-390 (2013) (査読あり)
4. Naoyuki Ichihara and Shuenn-Jyi Sheu, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, SIAM J. Math. Anal. 45(1) 279-306 (2013) (査読あり)
5. Naoyuki Ichihara, Criticality of ergodic type HJB equations and stochastic ergodic control, 数理解析研究所講究録 No. 1855, pp.109-114 (2013) (査読なし)
6. Naoyuki Ichihara, Long time asymptotic problems for stochastic optimal control and related variational problems, 数理解析研究所講究録 No.1837, pp.102-113 (2013) (査読なし)

〔学会発表〕(計 26 件)

1. Naoyuki Ichihara, Phase transitions arising in some stochastic optimal control problems, Viscosity solutions and related topics, 早稲田大学(東京)(2015/03/27)
2. Naoyuki Ichihara, Criticality of HJB equations and stochastic ergodic control, Seminaire d'Analyse, トゥール大学(フランス)(2015/02/26)
3. Naoyuki Ichihara, Phase transitions for controlled Markov chains on infinite graphs, 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所(京都)(2014/12/17)
4. Naoyuki Ichihara, Phase transitions for controlled Markov chains on infinite graphs, The ninth meeting on probability and PDE, 津田塾大学(東京)(2014/11/14)
5. Naoyuki Ichihara, Phase transitions in stochastic optimal control, Stochastic problems associated with partial differential equations, 京都大学数理解析研究所(京都)(2014/09/17)
6. Naoyuki Ichihara, Phase transitions for

- controlled Markov chains on infinite graphs, Probability Seminar, Institute of Mathematics, Academia Sinica (台湾)(2014/08/26)
7. Naoyuki Ichihara, The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type, Stochastic Processes and Mathematical Finance, 関西大学(大阪)(2014/02/24)
8. Naoyuki Ichihara, Criticality theory for Hamilton-Jacobi-Bellman equations, 語ろう数理解析, 広島大学(広島)(2014/02/18)
9. Naoyuki Ichihara, The generalized principal eigenvalue for ergodic type HJB equations, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学(松山)(2013/09/24)
10. Naoyuki Ichihara, The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type, Probability Seminar Institute of Mathematics, Academia Sinica (台湾)(2013/09/02)
11. Naoyuki Ichihara, The generalized principal eigenvalue for Hamilton-Jacobi-Bellman equations of ergodic type, Kumamoto Applied Analysis Seminar, 熊本大学(熊本)(2013/07/27)
12. Naoyuki Ichihara, Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control, Differential Equations and Applications seminar, パドヴァ大学(イタリア)(2013/06/20)
13. Naoyuki Ichihara, On the criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations, 日本数学会年会, 京都大学(京都)(2013/03/22)
14. Naoyuki Ichihara, Asymptotic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic control, 日本数学会年会統計数学分科会特別講演, 京都大学(京都)(2013/03/20)
15. Naoyuki Ichihara, Criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations and stochastic ergodic control, PDE seminar ブラウン大学(アメリカ)(2013/03/08)
16. Naoyuki Ichihara, Criticality of ergodic type HJB equations and stochastic ergodic control, Workshop on Finance Stochastics and Asymptotic Analysis, 大阪大学(大阪)(2013/02/11)
17. Naoyuki Ichihara, On the criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations, Matsuyama analysis seminar, 愛媛大学(松山)(2013/02/09)
18. Naoyuki Ichihara, On the criticality of viscous Hamilton-Jacobi equations, Fukae workshop on differential equations 2013, 神戸大学(神戸)(2013/01/25)

19. Naoyuki Ichihara, A variational formula for asymptotic solutions of viscous Hamilton-Jacobi equations, FMSP Tutorial Workshop "Weak KAM Theory and Related Topics", 東京大学 (東京) (2013/01/15)
20. Naoyuki Ichihara, Criticality of ergodic type Hamilton-Jacobi-Bellman equations and stochastic ergodic control, Markov processes and Stochastic Analysis, 京都大学 (京都) (2013/01/13)
21. Naoyuki Ichihara, Criticality of ergodic type HJB equations and stochastic ergodic control, 確率論シンポジウム, 京都大学数理解析研究所 (京都) (2012/12/19)
22. Naoyuki Ichihara, Criticality of ergodic type HJB equations and stochastic ergodic control, Probability seminar, 東北大学 (仙台) (2012/11/30)
23. Naoyuki Ichihara, Criticality of Hamilton-Jacobi-Bellman equations and stochastic ergodic control, 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学 (福岡) (2012/09/18)
24. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Kyusyu functional equations seminar, 福岡大学 (福岡) (2012/06/29)
25. Naoyuki Ichihara, Long time asymptotic problems for stochastic optimal control and related variational problems, Progress in Variational Problems, 京都大学数理解析研究所 (京都) (2012/06/12)
26. Naoyuki Ichihara, Large time asymptotic problems for stochastic control with superlinear cost and associated partial differential equations, Analysis seminar, 東北大学 (仙台) (2012/05/11)

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/naoyukiichihara/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

市原 直幸 (ICHIHARA, Naoyuki)

青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 70452563