

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：53101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740093

研究課題名(和文) ファインマン・カッツ汎関数に基づく確率解析とポテンシャル論への応用

研究課題名(英文) Stochastic analysis based on Feynman-Kac functionals and its applications to potential theory

研究代表者

田原 喜宏 (Tawara, Yoshihiro)

長岡工業高等専門学校・一般教育科・准教授

研究者番号：00567901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：様々なマルコフ過程のファインマン・カッツ汎関数の漸近挙動についての研究を行った。とくに概安定過程の正值連続加法汎関数の大偏差原理を証明した。また、マルコフ過程にフェラー性、強フェラー性や緊密性を仮定して、Feynman-Kac汎関数によって正規化されたマルコフ過程の滞在分布のドンスカー・ヴァラダーン型大偏差原理が成立することを示した。更に福島分解をより一般化した形で示した。

研究成果の概要(英文)：We studied asymptotic behaviors of symmetric Feynman-Kac functionals of various Markov processes. In particular, we show the large deviation principle for positive continuous additive functionals of nearly stable processes. Moreover, we show large deviation principles for the occupation distribution of a symmetric Markov process normalized by Feynman-Kac functional under the conditions for the Markov processes to be Feller, strong Feller and tight. Moreover, we proved the generalized Fukushima's decomposition.

研究分野：基礎解析学

キーワード：ファインマン・カッツ汎関数 大偏差原理 ディリクレ形式 対称マルコフ過程

1. 研究開始当初の背景

粒子の運動が現在の位置にのみに依存し、過去の軌跡に依存しない確率過程をマルコフ過程と呼ぶ。代表者是对称マルコフ過程の見本路に対する重み(ファインマン・カツ汎関数)をつけた確率過程の漸近挙動についての研究を行ってきた。またマルコフ過程に対応するディリクレ形式は一意的に定まる。このことを踏まえ、ファインマン・カツ汎関数に対応するシュレディンガー形式を用いた確率解析については豊富な結果が得られている。しかしながら多くの場合は連続かつ有界変動であるようなファインマン・カツ汎関数に関するものであり、不連続な場合や有界変動でないファインマン・カツ汎関数の研究は近年になってからであった。また、有界変動な場合においての研究成果もその多くはファインマン・カツ汎関数に対応するポテンシャルに対してグリーン緊密と呼ばれる無限遠方で十分に小さいという仮定を与えた条件下でのものが多く、より広いクラスのポテンシャルについて拡張していきたいと考えていた。

2. 研究の目的

本研究を始めた段階での代表的な成果は「主要部に対応するマルコフ過程が保存的である場合、グリーン緊密なポテンシャルで重みをつけたシュレディンガー半群の増大度の L^p 独立性が成立する必要十分条件は L^2 増大度が 0 以下となることである」というものであった。ここで簡単に加法汎関数について述べる。いわゆる古典的なシュレディンガー型作用素 $(-1/2)\Delta + V$ (ただし、 Δ はラプラス作用素、 V はポテンシャル関数である) を確率解析の立場から解釈するとマルコフ過程の見本路が V の台の上に存在するときのみ変動が起こる 1 次元確率過程を考えることができる。これは時間に関して連続であり、加法汎関数と呼ばれる。この関係はより一般のマルコフ過程とポテンシャルを測度として考えることができる。また、状態空間の直積空間上で定義され、対角線集合上で 0 となるような関数を考えると、この関数の台から台へとマルコフ過程が飛躍したときのみ変動が起こる加法汎関数を考えることができ、この加法汎関数は時間に関して不連続であることがわかる。さらにディリクレ形式から構成される対称マルコフ過程については、ディリクレ形式の定義域に属する関数とマルコフ過程を合成した確率過程を考えると、マルチンゲール部分とエネルギー零の連続加法汎関数と呼ばれる部分に一意的な分解が成立する、福島分解が知られている。エネルギー零の加法汎関数は必ずしも有界変動ではなく、超関数とマルコフ過程の合成のようになっており、その確率解析は一般に難しい。これらの加法汎関数を重みとして考える確率過程がファインマン・カツ汎関数である。

半群の増大度の L^p 独立性とは半群の L^p 空間

上の作用素ノルムの漸近挙動が p に依存しないという性質である。また、マルコフ過程が保存的でない場合についても L^p 独立性が成立することが知られている。これらの結果にもとづいて様々なマルコフ過程、およびシュレディンガー半群の漸近挙動、とくに加法汎関数の大偏差原理および、Donsker-Varadhan 型の大偏差原理が成立する条件を明らかにする。

3. 研究の方法

上記の研究目的を踏まえてマルコフ過程の漸近挙動について以下の研究を行う

- (1) 土田兼治氏(防衛大学校)とともに Nearly Stable Process という通常の対称安定過程に緩変動関数を掛けた表象を持つ対称マルコフ過程の加法汎関数の大偏差原理を証明する。この証明については Gartner-Ellis の定理を用いた。Gartner-Ellis の定理とは、ある確率過程の対数モーメント母関数の存在とその微分可能性を確認できれば、その確率過程の大偏差原理が証明できるというものである。本研究においては対数モーメント母関数が加法汎関数に対応するシュレディンガー形式のスペクトル関数に一致することが L^p 独立性から示され、これに基づいて対数モーメント母関数の存在と微分可能性を証明する。
- (2) 竹田雅好氏(東北大)とともに強フェラー性を持ち、状態空間の基礎の測度がグリーン緊密であるようなマルコフ過程の滞在分布について、不連続なファインマン・カツ汎関数によって正規化した場合における Donsker-Varadhan 型大偏差原理を証明する。
- (3) 金大弘氏(熊本大)、桑江一洋氏(福岡大)とともにより一般的な、とくに不連続な部分とエネルギー零であり必ずしも有界変動でないような部分を持つファインマン・カツ汎関数を重みに持つ場合のシュレディンガー半群の増大度の L^p 独立性およびマルコフ過程の滞在分布の大偏差原理についての研究を行う。この研究は(2)の研究を更に一般化するものである。

4. 研究成果

- (1) Nearly Stable Process の加法汎関数の大偏差原理についてはグリーン緊密性を持つポテンシャルを持つ場合に対して証明することができた。本研究については共著としてまとめ、専門誌から出版された。本研究の対象とした Nearly Stable Process については個別のマルコフ過程についてはレヴィ過程の立場から様々な形で漸近挙動について研究がなされてきたが、統一的に論じたのは土田氏と代表者が初めてであり、マルコフ過程が保存的であるという条件や、フ

エラー性、強フェラー性など、良い条件を課されているために更なる発展が期待できるものと考えている。

- (2) 竹田氏との共同研究においては、ファインマン・カツ汎関数によって正規化されたマルコフ過程の滞在分布の大偏差原理が成立することを示した。この共同研究の中で、シュレディンガー半群の L^p 独立性を用いて Donsker-Varadhan 型大偏差原理におけるレート関数である、 I 関数と L^2 増大度が一致することを用いている。ところがこの研究の中ではポテンシャルに負の値を許容しているために通常のままではレート関数としての条件を満たしていない。そこで、ファインマン・カツ汎関数の期待値で正規化するとレート関数の条件を満たすことが直ちに解る。このことを用いて大偏差原理が成立することを証明した。本成果をまとめた論文は専門誌から出版された。
- (3) 金氏、桑江氏との共同研究においては、基本的な方法については竹田氏との共同研究や代表者の先行研究に近いものであるが、その結果を完全に含んだ上で有界変動でないエネルギー零な連続加法汎関数を併せたシュレディンガー半群の L^p 独立性について論じた。さらに、エネルギー零の加法汎関数を論じる中でマルコフ過程が内部証明を含む場合でも福島分解が可能であることを示した。それらの手法を用いた上で、エネルギー零の連続加法汎関数にある形で対応する測度がディンキンクラスと呼ばれるクラスに属するとき、有界変動なものとは有界変動ではないがエネルギー零な連続加法汎関数を同時に含むファインマン・カツ汎関数で正規化した上で滞在分布の大偏差原理が成立することを示した。
- (4) さらに竹田氏、土田氏との共同研究で、シュレディンガー半群がコンパクト作用素となる十分条件について論じた。この研究においてはマルコフ過程がレゾルベント強フェラー性と緊密性を持つとき、ポテンシャルが加藤クラスと呼ばれるあるクラスに属するならばシュレディンガー半群がコンパクト作用素になることを確率論的に証明した。また、グリーン緊密なポテンシャルでなおかつ可積分でないような例を構成することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Daehong Kim, Kazuhiro Kuwae, and

Yoshihiro Tawara, Large deviation principles for generalized Feynman-Kac functionals and its applications, *Tohoku Mathematical Journal*, 68, 2016, 161-197, 査読有
<http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1466172769>

Yoshihiro Tawara and Kaneharu Tsuchida, Differentiability of Spectral Functions for Nearly Stable Processes and Large Deviations, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 17, no.03, 1450017, 2014, [15pages], 査読有
<http://dx.doi.org/10.1142/S0219025714500179>

Masayoshi Takeda and Yoshihiro Tawara, A Large Deviation Principle for Symmetric Markov Processes Normalized by Feynman-Kac Functionals, *Osaka Journal of Mathematics*, 50, 2013, 287-307, 査読有
<http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1371833486>

[学会発表](計3件)

Yoshihiro Tawara, On an extension of Persson's theorem, Summer School on Dirichlet Forms and Stochastic Analysis, Young Forum, 2015年8月26日、関西大学(大阪府吹田市)

田原喜宏, シュレディンガー型作用素のスペクトル下限の L^p 独立性とそれに関する話題、函数論シンポジウム、2014年11月8日、東北大学AIMR(宮城県仙台市)

田原喜宏, A Large Deviation Principle for Symmetric Markov Processes Normalized by Feynman-Kac Functionals, マルコフ過程とその周辺、2013年11月14日、東北大学(宮城県仙台市)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/>

6．研究組織

(1)研究代表者

田原 喜宏 (Yoshihiro Tawara)

長岡工業高等専門学校・一般教育科・准教授

研究者番号：00567901