

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740097

研究課題名(和文) 曲線および曲面のダイナミクスを記述する幾何学的発展方程式の新展開

研究課題名(英文) Dynamical aspects of geometric evolution equations defined on curves or surfaces

研究代表者

岡部 真也 (Okabe, Shinya)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70435973

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では主に次の二つの主題に取り組んだ：(A) 幾何学的発展方程式にその挙動を支配される平面曲線の動的様相；(B) 高階放物型方程式に対する障害物問題。主題(A)については、(A1) 無限の長さをもつ平面開曲線の時間大域挙動、(A2) 有限の長さをもつ平面開曲線に対して平衡状態へ収束を示すための一般論構築、という二つの成果を得た。一方、主題(B)においては以下のそれぞれの場合に時間大域的可解性とその解の正則性を示すことに成功した：(B1) 放物型重調和方程式に関する単一障害物問題；(B2) 放物型重調和方程式に対する二重障害物問題。

研究成果の概要(英文)：We consider the following problems: (A) Dynamical aspects of geometric evolution equations defined on planar curves; (B) Obstacle problem for parabolic biharmonic equation. Regarding the theme (A), we proved that (A1) a planar open curve with infinite length converges to the borderline elastica as time goes to infinity; (A2) if a solution of geometric evolution equation converges to an equilibrium along a sequence of time, then the curve converges to an equilibrium as time goes to infinity, provided that the set of the equilibria has a discrete structure. Concerning the theme (B), we considered (B1) obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, and (B2) two-obstacle problem for the parabolic biharmonic equation. For each problems (B1) and (B2), we proved the long time existence of solutions and investigated the regularity of the solutions.

研究分野：非線形解析学

キーワード：幾何学的発展方程式 変分法

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 曲線に対して定義される弾性エネルギーを最小化するという変分問題に関する研究は Euler まで遡ることができる。一方で、弾性エネルギーの勾配流として定義される幾何学的発展方程式にその挙動を支配される曲線の挙動に関しては、そのダイナミクスまで解明した例は希であった。

(2) 研究開始当初は自己交差抑制流を構成するという目的で研究目的に陰に含まれていた高階発展方程式に対する障害物問題に関しては、高階楕円型方程式については一定の成果が 1980 年代までに得られていたが、発展方程式については大きな進展のないままであった。

### 2. 研究の目的

本研究課題における当初の目的は、幾何学的汎関数に対する勾配流として定義される幾何学的発展方程式によって支配される曲線および曲面のダイナミクスを解析する手法を開発し、その動的構造を数学的に解明することであった。具体的には、項目 1 (1)において述べた背景のもとで、この目的に沿った研究を以下の 3 つの主題を設定した:

- Shortening-Straightening 流による無限の長さをもつ曲線のダイナミクス
- メビウス汎関数を利用した自己交差抑制流の構成とそのダイナミクス
- Action 最小化問題に従う曲線および曲面のダイナミクス

なお、研究を実施するなかで、自己交差抑制流の構成方法を汎関数に工夫を加える内的な方法から、曲線の挙動に障害物を用いて外的な作用を与える方法に変更することを思い至った。以下の項目において、これに関する研究の方法や得られた成果についても説明する。

### 3. 研究の方法

(1) 幾何学的発展方程式に挙動を支配される曲線の動的様相に関する解析においては、まず、解析的半群を用いた抽象発展方程式に関する基礎的な手法により短時間解を構成する。そして、エネルギー法により解が時間大域的に延長されることを証明するとともに、一様有界性を示すことによって、解がある時間列に沿ってある定常解に収束する、所謂、部分収束を証明する。部分収束から完全収束、すなわち、時刻を無限大とする極限をとるとき初期値に対して一意に定まるある定常解に収束することを示す手法が必要であるが、それは以下で述べる本研究課題における成果の一つである。

(2)項目 2 において述べたように、自己交

差抑制流を目的とした研究の過程において着想を得た、高階発展方程式に対する障害物問題に関する研究方法を記載する。解の構成を変分法に基づく時間離散的な近似解法、所謂、minimizing movements によって行う。これは、対象とする放物型方程式がある汎関数に対する勾配構造をもつことを利用して、適当な汎関数に対する変分問題の解から求める解の近似解を構成する手法である。近似解の正則性を、極限をとる際に必要となる、一様性に注意しながら示すことによって、求める解の正則性を証明する。

### 4. 研究成果

幾何学的発展方程式に挙動を支配される開曲線に関する数学解析について、得られた成果を説明する。

(1) 長さ有限の場合の曲線の時間大域挙動について、挙動を支配する短時間解の構成は 2011 年度に結果を得ていた。時間大域的に曲線がどのような挙動をするのかが興味の対象であるが、初期曲線が自己交差しない場合には、時刻を無限大とする極限をとるときに、自明解として位置づけられる線分に滑らかな意味で収束することを証明した(発表論文)。

(2) 長さが無限大である場合については、挙動を支配する幾何学的発展方程式が曲線の長さを含む汎関数に対する勾配流として定義されているため、無限のエネルギーに対する勾配流、と形式的に理解される問題となる。アプリオリに解の有界性を与えるエネルギー汎関数が非有界であることから生じる困難を回避するために、近似的に解を構成する方法を選択した。具体的には、適当な境界条件に従う長さ有限の曲線の枠組みの中で解を構成し、その解からなる族に関して極限操作をすることにより、目的である無限の長さをもつ曲線の時間大域挙動を得ることに成功した。特に、この曲線はある時間列にそって古典的な弾性曲線である *borderline elastica* に滑らかな意味で収束することを明示した(発表論文)。

(3) 前項目 (2) において、曲線の収束はある時間列に沿ったものに限られていた。本研究で扱う幾何学的発展方程式は対応する汎関数の性質により、強い平滑化効果をもつことがわかる。従って、その解の時間大域的存在および滑らかな意味での一様有界性は自然と期待される結果といえる。このとき、Ascoli-Arzelà の定理を用いた一般的な議論によって、前項目のように適当な時間列に沿って解が定常解に収束する、所謂、部分収束を証明することが

できる。しかしながら、部分収束は解の動的様相を理解するためには十分な結果とはいえない。実際、初期値に対して収束先である定常解が一意に定まることすら示すことはできない。そこで、部分収束するならば解はある定常解に時刻を無限大とする極限のもとで収束(所謂、完全収束)することを示す一般論を構築することを課題として研究を実施した。その結果、定常解全体の集合が適当な意味で離散的であれば、部分収束から完全収束を示す手法を構成することに成功した(発表論文)。この手法は勾配構造をもつ発展方程式であれば適用可能な一般的なものであり、今後の様々な活用が期待される。

当初の研究計画に含まれていた自己交差抑制流の研究を進める中で、研究方針を汎関数に工夫を加えることから障害物により解の挙動に制限を加えることに変更した。それに伴い考察するに至った高階発展方程式に対する障害物問題について得られた結果を以下で説明する。

- (4) 四階放物型方程式のプロトタイプともいえる放物型重調和方程式に対する障害物問題について研究を実施した。ここで障害物問題とは、解がある既知関数以下とならないとして解に制限を加えた問題のことを指す。対応する重調和方程式に対する障害物問題に関する既存の研究が幾つか知られていたことから、変分問題の解を用いて時間離散的な近似解を構成する手法 *minimizing movements* を用いて解析を行った。その結果、任意の次元に対して時間大域的な弱い意味の解が存在すること、および、次元を 3 以下に制限するときその解が超関数の意味で問題を満たすことを証明することに成功した(発表論文)。特に、次元を制限するとき、解が方程式をみたすことを解からある測度が定まることと理解することができる。
- (5) 前項 (4) において扱った問題を二重障害物問題へと拡張する目的で研究を実施した。すなわち、解の挙動が二つの既知関数によって上と下から制限される問題を考察した。このとき、障害物を表す二つの既知関数が一致している箇所(以下、一致集合とよぶ)において本質的な困難が生じる。この難点を解決すべく、一旦、二つの既知関数を「剥がす」ことによってこの難点を形式的に解消した上で解を構成し、その解を近似解として求める解を構成する方法により証明を試みた。この際、極限操作を正当化するために近似解の一様連続性が必要となるが、前項 (4) と同様に次元を 3 以下に制限すること

で近似解の一様有界性を得ることができ。その結果、前項 (4) と同様の結論を得ることに成功した(発表論文)。

以上の障害物問題に関する研究は、当初の研究目的に含まれていた自己交差抑制流の構成へと応用することを検討している。実際、定常問題の場合にはそういった応用がなされており、発展方程式についても同様の展開が期待される。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Matteo Novaga, 岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flows defined on planar curves, *J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal)*, 査読有, 掲載決定

蛭子くるみ, 岡部真也, Dynamical aspect of a hybrid system describing intermittent androgen suppression therapy of prostate cancer, *The Proceedings of the 4<sup>th</sup> Italian - Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's*, 査読有, 掲載決定.

Matteo Novaga, 岡部真也, The two-obstacle problem for the biharmonic parabolic equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 査読有, **136**, 215–233, (2016)

Matteo Novaga, 岡部真也, Regularity of the obstacle problem for the biharmonic parabolic equation, *Matteo Novaga, Math. Ann.*, 査読有, **363** 1147–1186, (2015)

岡部真也, The gradient flow for the modified one-dimensional Willmore functional defined on planar curves with infinite length, *Adv. Stud. Pure Math.*, 査読有, **64** 193–200, (2015)

Matteo Novaga, 岡部真也, Curve shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, J. Differential Equations, 査読有, **256** 1093–1132, (2014)

岡部真也, Remarks on a dynamical aspect of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with fixed boundary, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, **B35**, Mathematical and numerical analysis for interface motion arising in nonlinear phenomena, 41–63, (2012)

岡部真也, The variational problem for a certain space-time functional defined on planar curves, J. Differential Equations, 査読有, **252**, 5155–5184, (2012)

[学会発表](計 21 件)

岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flow defined on planar curves, Geometric flows and related problems, 東京工業大学 (東京都目黒区), 2016年3月3日-4日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, The two obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, The 17th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, 北海道大学 (札幌市), 2016年2月15日-16日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flow defined on planar curves, The 33th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, 九州大学 (福岡市), 2016年1月27日-29日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, The two obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, 愛媛大学解析セミナー, 愛媛大学 (松山市), 2015年10月31日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flow defined on planar curves, 応用数学セミナー@芝浦工大, 芝浦工業大学 (さいたま市), 2015年8月26日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flow defined on planar

curves, 小山高専数学談話会, 小山高等専門学校 (小山市), 2015年7月9日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, Convergence to equilibrium of gradient flow defined on planar curves, 4th Italian-Japanese Workshop, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Palinuro-(Italy), 2015年5月25日-29日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Convergence to equilibria of steepest descent flows defined on planar curves, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大 (大阪市), 2014年12月13日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, The obstacle problem for a fourth order parabolic equation, Mathematical Approaches to Pattern Formation, 東北大学 (仙台市), 2014年10月28日--10月31日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, The obstacle problem for a fourth order parabolic equation, 表面・界面のダイナミクスの数理 VIII, 東京大学 (東京都目黒区), 2014年10月22日--10月24日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, 四階放物型方程式に対する障害物問題, 日本数学会 秋期総合分科会 特別講演, 広島大学 (東広島市), 2014年9月25日--9月28日, 口頭発表, 国内学会

岡部真也, The obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, 京都大学 NLPDE セミナー, 京都大学 (京都市), 2014年6月27日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, Regularity of solutions to the obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, The 6th Nagoya Workshop on Differential Equations, 名古屋大学 (名古屋市), 2014年3月10日--2014年3月12日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Regularity of solutions to the obstacle problem for the parabolic biharmonic equation, Joint Research Program on Nonlinear PDE's Universita di Firenze and Tohoku University, Universita di Firenze (Firenze, Italy), 2014年3月3日--2014年3月7日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Asymptotic behavior of curve shortening-straightening flow for planar curves with finite length, Dynamics and Spacial Functions, 岩手大学 (盛岡市), 2014年2月22日, 口頭発表, 国内研究集会

岡部真也, Convergence to equilibrium

of gradient flows defined on planar curves, The 15th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis, 北海道大学 (札幌市), 2014年2月17日--2014年2月18日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Construction of solutions to a fourth order parabolic obstacle problem via minimizing movements, Geometry of solutions of partial differential equations, 数理解析研究所 (京都市), 2013年11月20日--2013年11月22日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, The variational problem for a certain space-time functional defined on planar closed curves, Differential Equations and Applications, Padova University, Padova (Italy), 2013年2月20日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Existence and convergence of solutions to the shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, Calculus of Variations and Geometric Measure Theory, Pisa University, Pisa (Italy), 2012年11月21日, 口頭発表, 国際研究集会

岡部真也, Long time existence of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, The 9th AIMS Conference on Dynamical System, Differential Equations and Applications, Orland, Florida (USA), 2012年7月2日, 口頭発表, 国際研究集会

21 岡部真也, Long time existence of shortening-straightening flow for non-closed planar curves with infinite length, Tohoku-Fudan Workshop on the occasion of centennial of the Faculty of Science of Tohoku University, 東北大学 (仙台), 2012年5月19日, 口頭発表, 国際研究集会

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者  
岡部 真也 (OKABE, Shinya)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：70435973

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：