

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740099

研究課題名(和文) 非線形変分不等式に支配される自由境界の多角的観点から捉える安定構造の研究

研究課題名(英文) Multifaceted analysis for stable structures of free-boundaries governed by nonlinear variational inequalities

研究代表者

白川 健 (Shirakawa, Ken)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：50349809

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：自由境界の安定性に関して、従来の「力学系」からの観点とは別の「近似」という観点で捉えるアイデアを導入する事で、自由境界の安定構造を多角的観点から考察する研究課題に取り組んだ。大きな進展があったのは、結晶粒界の数学モデルを扱った研究課題であり、様々な数学モデルに対する統一的な扱いを可能とする数学的解法を構築できた他、熱交換・非等方性・力学的境界条件等を取り入れた改良型モデルの考案により、今後の活動における新しい研究の展望も得られた。

研究成果の概要(英文)：The objective of the study is to observe the stable structures of free-boundaries from multifaceted viewpoints. The main advances are in the study of grain boundaries, and an original method which enables the uniform treatment of a number of mathematical models is established. In addition, some new research initiatives are obtained through the derivations of improved models which are coupled with heat exchanges, anisotropies, dynamic boundary conditions, and so on.

研究分野：非線形解析学

キーワード：自由境界 非線形変分不等式 安定構造 多角的観点からの考察 力学系の観点 近似の観点 結晶粒界 統一的な解法

1. 研究開始当初の背景

近年の代表者は、非線形解析学の数学理論と幾何学的な解析手法の双方を活用し、非線形変分不等式が再現する自由境界の考察に取り組んでいる。研究のキーワードは「安定性」という概念であり、安定性を備えた自由境界の幾何学的構造(安定構造)の追及は、現在までの代表者の大きな興味の対象となっている。他にも、海外研究者との「薄膜磁性体」や「結晶粒界」に関する共同研究においても代表者は大いに刺激を受け、自由境界問題では従来とは全く別の観点からでも有効な安定性理論が構築できるのではないかという着想を得ている。

この様な経緯を踏まえ、本研究は自由境界の安定構造を多角的観点から考察する事を構想の柱として、計画されたものである。

2. 研究の目的

本研究では、以下2つの研究目的を念頭に、研究課題および活動計画を立案した。

目的(Ⅰ)力学系の観点からの安定性の研究

研究対象は、時間が十分経過したときの自由境界(定常状態)を記述する「定常問題」であり、その解は力学系の平衡点と対応する。定常問題の解析では、安定性は形状変化に対する「復元力」を意味し、強い復元力を持つ安定構造の幾何学的構造を明らかにする事が、研究の目的となる。

目的(Ⅱ)近似の観点からの安定性の研究

薄膜磁性体や結晶粒界等の解析が難しいとされる事例では、解の一意性が原理的に成立しない状況に直面する事が多い。こうした一意性の無い問題に対して近似極限による考察を行う場合、極限の変分不等式の解には近似問題の極限として関連付けできるものとそうでないものとが現れる。ここでは安定性を近似極限との関連性の強さとして捉え、安定な自由境界の構造とその近似プロセスの解明を目的とする。

3. 研究の方法

以下は、本研究計画で主力とした研究方法である。

(A)力学系と幾何学の理論による数学解析

非線形変分不等式に支配される自由境界問題を取り上げ、目的(Ⅰ)の観点で捉える自由境界の安定構造を、幾何学的手法を用いて明らかにする。その際、扱う変分不等式の解の存在が未保証の場合は、可解性の検証から着手する。

(B)安定構造の多角的観点からの考察

一意性の無い自由境界問題に着目し、その近似問題を様々に取る。その上で、多種類の近似問題の極限として関連付けされる自由境界の構造を選び出し、これを目的(Ⅱ)の観点で捉えた安定構造とする。更に、目的(Ⅰ)(Ⅱ)のそれぞれにおける安定構造の幾何学的特徴を比較し、双方の特徴を備えた自由境界を最も重要度の高い再現例とする。

4. 研究成果

以下では、研究期間の4年間を通して得られた成果を、年度毎に整理して報告する。

平成24年度での研究成果

平成24年度では「薄膜磁性体」と「結晶粒界」に現れる自由境界問題を研究課題として設定し、これらに対する数学理論を用いた解析に取り組んだ。

薄膜磁性体に関しては、研究協力者であるハディジ氏(パリ東大学)と連携を取りながら課題を遂行した。この年度では標準的な解析法とされる「ガンマ収束」の理論が適用できないケースに挑戦し、材料係数に制約条件を追加した一部の自由境界の安定構造に対して、ガンマ収束に頼らない解析法を新たに構築した。

結晶粒界現象に関しては扱う変分不等式の解の存在が未保証であったため、本年度では最も簡単な空間1次元のケースに的を絞り、1次元数学モデルの可解性と時間無限大での解挙動について、研究協力者の渡邊氏(サレジオ高専)と共同で取り組んだ。その結果、空間1次元特有の埋蔵定理を活用すれば、数学モデルを時間依存型劣微分作用素方程式論の枠組みで扱い可能となる事を明らかにし、得られた一連の成果を国内外の研究集会で報告した。

平成25年度での研究成果

平成25年度では結晶粒界の数学モデルに焦点を絞り、一般多次元のケースに対する数学理論による解析に取り組んだ。

扱う数学モデルは“Kobayashi-Warren-Carterモデル”と呼ばれる放物型の連立変分不等式で、研究協力者の渡邊氏(サレジオ高専)、Mazon氏(バレンシア大学)、Moll氏(バレンシア大学)との共同研究として活動を開始した。当初は連携関係の構築に時間がかかったものの、モデルを時間離散近似する着想を基に研究討論を重ねた結果、一般多次元モデルの解の存在定理の証明に成功した。加えて、この解析法はKobayashi-Warren-Carterモデルの近似問題や類似の放物型変分不等式にも適用可能である事もわかり、結晶粒界と関連する幅広い放物型のシステムを扱い可能とする「統一的な解法の構築」という新しい研究構想を得る事もできた。

平成26年度での研究成果

平成26年度の活動内容は、大きく前半期と後半期の2つの部分に分けられる。

前半期では、Kobayashi-Warren-CarterモデルとAllen-Cahn方程式とをカップリングさせた改良型の数学モデルの解析に取り組んだ。結果として、改良型モデルそのものだけでなく、これと関連する多数の連立系をも扱い可能とする数学理論による統一的な解析法を構築した。他にも研究協力者との討論の過程で結晶構造の異方性(非等方性)の重要性がクローズアップされ、その際には結晶方位の変化に合わせて結晶構造が回転する

効果を新たに追加する必要性が指摘された。この指摘に基づき更に討論を重ねた結果、上記の結晶構造の回転効果を取り入れた非等方的数学モデルを独自に考案し、これが連立変分不等式としてどの様に定式化されるかを明らかにした。

後半期では、自由境界の構造解析に関する研究を新しくスタートさせた。この課題に対しては、主に研究協力者の Mazon 氏と Moll 氏の助言を仰ぎながら研究方針を確定させ、手始めとして非斉次 Dirichlet 型境界条件での 1 次元定常解および一般多次元での球対象な定常解の解構造を、幾何学的な観点から明らかにした。

平成 27 年度における研究成果

平成 27 年度では、前年度からの継続である結晶粒界を研究テーマとし、「自由境界の構造解析」と「非等方的数学モデルの数学解析」の 2 つを取り組むべき研究課題として活動を開始した。しかし 2 つの課題の両方において特有の難しさが潜んでいた事が判り、年度の早い段階において同時並行で課題を進めるプランには難色が示された。更に研究協力者との討論でも「現象に忠実な幾何学的構造の追跡には非等方性の扱いを可能とする数学理論を先に構築すべき」という意見が寄せられた。

これらを踏まえ、本年度では推進方策を「リアルな再現状況を追跡可能とする数学理論の構築」と再設定し、この方策に基づき活動内容を非等方的数学モデルの数学解析に絞る方向に、計画を軌道修正した。非等方的数学モデルでは、結晶構造に滑らかさを仮定する「緩和モデル」を考案し、緩和モデルの解の存在に関して数学理論による厳密な証明を与える事に成功した。またこの結果については、国内・海外の計 6 回の研究集会において成果発表を行った。

他方で、年度後半ではイタリアのパヴィア大学と研究討論する機会があり、既存の数学モデルに「力学的境界条件」を組み入れるという、新しい研究テーマを開拓した。力学的境界条件によって先述の推進方策とも適合するリアルな現象再現モデルが構築できるため、これにより自由境界の研究では幾何学的構造解析のみならず、最適制御問題等の発展的課題に対しても新しい展望が開かれるものと、今後の展開に期待を寄せている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

1. Shirakawa, K.; Watanabe, H.: Large-time behavior of a PDE model of isothermal grain boundary motion with a constraint. *Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, AIMS Proceedings 2015 (2015), 1009-1018, 査読有.

2. Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N.: Phase-field systems for grain boundary motions under isothermal solidifications. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 24 (2014), 353-400, 査読有.
3. Sato, N.; Aiki, T.; Murase, Y.; Shirakawa, K.: One dimensional free boundary problem for adsorption phenomena. *Applied Math Journal: Networks and Heterogeneous Media*, 9 (2014), no. 4, 655-668, 査読有.
4. Watanabe, H.; Shirakawa, K.: Stability for approximation methods of the onedimensional Kobayashi-Warren-Carter system. *Mathematica Bohemica*, 139 (2014), no. 2, 381-389, 査読有.
5. Moll, J. S.; Shirakawa, K.: Existence of solutions to the Kobayashi-Warren-Carter system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 51 (2014), 621-656, 査読有.
6. Shirakawa, K.; Watanabe, H.: Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 7 (2014), no. 1, 139-159, 査読有.
7. Watanabe, H.; Shirakawa, K.: Qualitative properties of a one-dimensional phasefield system associated with grain boundary. In: *Current Advances in Applied Nonlinear Analysis and Mathematical Modelling Issues*, pp. 301-328, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 36, Gakko Tosho, Tokyo (2013), 査読有.
8. Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N.: Solvability for one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion. *Math. Ann.*, 356 (2013), 301-330, 査読有.
9. Shirakawa, K.: Limiting observations for planar free-boundaries governed by isotropic-anisotropic singular diffusions. *Adv. Differential Equations*, 18 (2013), no. 3-4, 351-382, 査読有.
10. Shirakawa, K.; Yamazaki, N.: Optimal control problems of phase field system with total variation functional as the interfacial energy. *Adv. Differential Equations*, 18 (2013), no. 3-4, 309-350, 査読有.
11. Kubo, M.; Shirakawa, K.; Yamazaki, N.: Variational inequalities for a system of elliptic-parabolic equations. *J. Math. Anal. and Appl.*, 387 (2012), 490-511, 査読有.

上記以外で、研究報告が 5 件

[学会発表](計 42 件)

1. 会議名: 2016 日本数学会年会
(実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; Moll, J. S.
講演題目: 異方性を加味した結晶粒界運動のフェーズ・フィールドモデルに対するエネルギー消散性
開催期間: 2016 年 03 月 16 日 ~ 2016 年 03 月 19 日
開催地: 筑波大学(茨城県・つくば市)
2. 会議名: 第 41 回発展方程式研究会
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; Moll, J. S.
講演題目: 異方性の効果を取り入れた結晶粒界モデルの可解性
開催期間: 2015 年 12 月 25 日 ~ 2015 年 12 月 27 日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス(東京都・文京区)
3. 会議名: 第 41 回発展方程式研究会
発表者: 渡邊 紘; 白川 健; 山崎 教昭
講演題目: 結晶粒界の非等温系モデルのエネルギー消散解と漸近挙動
開催期間: 2015 年 12 月 25 日 ~ 2015 年 12 月 27 日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス(東京都・文京区)
4. 会議名: Developments of the theory of evolution equations as the applications to the analysis for nonlinear phenomena
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Moll, J. S.
講演題目: Anisotropic models for grain boundary motions of Kobayashi-Warren-Carter types
開催期間: 2015 年 10 月 21 日 ~ 2015 年 10 月 23 日
開催地: RIMS, Kyoto Univ., Kyoto (Japan)
5. 会議名: 2015 日本数学会秋季総合分科会(実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; Moll, J. S.
講演題目: 異方性を加味した結晶粒界運動の Kobayashi-Warren-Carter 型数学モデル
開催期間: 2015 年 09 月 15 日 ~ 2015 年 09 月 16 日
開催地: 京都産業大学(京都府・京都市)
6. 会議名: 2015 日本数学会秋季総合分科会(実函数論)
発表者: 渡邊 紘; 白川 健; 山崎 教昭
講演題目: 結晶粒界現象を記述する非等温系数学モデルに対する解の漸近挙動
開催期間: 2015 年 09 月 15 日 ~ 2015 年 09 月 16 日
開催地: 京都産業大学(京都府・京都市)
7. 会議名: Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation (MNP 2015)
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N.
講演題目: Energy-dissipations in non-isothermal phase-field systems associated with grain boundary motions
開催期間: 2015 年 08 月 16 日 ~ 2015 年 08 月 18 日
開催地: Sapporo Convention Center, Sapporo (Japan)
8. 会議名: The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2015)
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Moll, S.
講演題目: Kobayashi-Warren-Carter type models of grain boundary motions with anisotropies
開催期間: 2015 年 08 月 10 日 ~ 2015 年 08 月 14 日
開催地: China National Convention Center, Beijing (China)
9. 会議名: Equadiff 2015
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.; Yamazaki, N.
講演題目: Energy dissipations for non-isothermal models of grain boundary motions.
開催期間: 2015 年 07 月 06 日 ~ 2015 年 07 月 10 日
開催地: Universite Claude Bernard Lyon 1, Lyon (France)
10. 会議名: 2015 日本数学会年会(実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘
講演題目: 非等温条件下における結晶粒界現象のフェーズ・フィールドモデル
開催期間: 2015 年 03 月 21 日 ~ 2015 年 03 月 24 日
開催地: 明治大学(東京都・千代田区)
11. 会議名: 第 40 回発展方程式研究会
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; 山崎 教昭
講演題目: 結晶粒界現象の非等温系モデルの可解性
開催期間: 2014 年 12 月 25 日 ~ 2014 年 12 月 27 日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス(東京都・文京区)
12. 会議名: 2014 日本数学会年度秋季総合分科会(実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘
講演題目: 凝固現象と結晶粒界現象の等温系カップリングモデルにおけるエネルギー消散解
開催期間: 2014 年 09 月 25 日 ~ 2014 年 09 月 28 日
開催地: 広島大学(広島県・東広島市)
13. 会議名: 2014 日本数学会年度秋季総合分科会(実函数論)
発表者: 渡邊 紘; 白川 健

- 講演題目: Allen-Cahn 方程式と結晶粒
界モデルによる連立系の時刻無限大に
おける 解挙動
開催期間: 2014 年 09 月 25 日 ~ 2014 年
09 月 28 日
開催地: 広島大学 (広島県・東広島市)
14. 会議名: The 10th AIMS Conference on
Dynamical Systems, Differential
Equations and Applications
発表者: Shirakawa, K.; Moll, J. S.;
Watanabe, H.
講演題目: Energy dissipations for
mathematical models of grain boundary
motions with isothermal
solidifications
開催期間: 2014 年 07 月 07 日 ~ 2014 年
07 月 11 日
開催地: Instituto de Ciencias
Matematicas, Universidad Autonoma de
Madrid, Madrid (Spain)
15. 会議名: 2014 日本数学会年会
(実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; 山崎 教昭
講演題目: 結晶粒界現象に対する凝固に
よる界面拡散を考慮した数学モデル
開催期間: 2014 年 03 月 17 日 ~ 2014 年
03 月 18 日
開催地: 学習院大学 (東京都・豊島区)
16. 会議名: 第 39 回発展方程式研究会
発表者: 白川 健; 渡邊 紘; 山崎 教昭;
Moll, J. S.
講演題目: Allen-Cahn 型方程式と結晶
粒界モデルによる連立偏微分方程式
開催期間: 2013 年 12 月 21 日 ~ 2013 年
12 月 23 日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス
(東京都・文京区)
17. 会議名: 第 39 回発展方程式研究会
発表者: 渡邊 紘; 白川 健
講演題目: 退化性を伴う 1 次元
Kobayashi-Warren-Carter モデルに対
する定性的性質
開催期間: 2013 年 12 月 21 日 ~ 2013 年
12 月 23 日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス
(東京都・文京区)
18. 会議名: New Role of the Theory of
Abstract Evolution Equation - From
a Point of View Overlooking the
Individual Partial Differential
Equations -
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.;
Yamazaki, N.; Moll, J. S.
講演題目: On Warren-Kobayashi-
Lobkovski-Carter type models of grain
boundary motions
開催期間: 2013 年 10 月 21 日 ~ 2013 年
10 月 23 日
開催地: RIMS, Kyoto University, Kyoto
(Japan)
19. 会議名: Workshop on Free Boundaries in
Laplacian Growth Phenomena and
Related Topics
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.;
Yamazaki, N.; Moll, J. S.
講演題目: Gradient systems associated
with grain boundary motions
開催期間: 2013 年 10 月 14 日 ~ 2013 年
10 月 17 日
開催地: Kawai Hall, Tohoku University,
Sendai (Japan)
20. 会議名: 2013 日本数学会秋季総合
分科会 (実函数論)
発表者: 白川 健; 渡邊 紘
講演題目: 結晶粒界の放物型フェーズ・
フィールドモデルにおける平滑化効果
とエネルギー消散性
開催期間: 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年
09 月 25 日
開催地: 愛媛大学城北キャンパス
(愛媛県・松山市)
21. 会議名: 2013 日本数学会秋季総合
分科会 (実函数論)
発表者: 渡邊 紘; 白川 健
講演題目: 結晶粒界現象を記述する退化
性を伴う 1 次元数学モデルに対する
定性的性質
開催期間: 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年
09 月 25 日
開催地: 愛媛大学城北キャンパス
(愛媛県・松山市)
22. 会議名: 2013 日本数学会秋季総合
分科会 (実函数論)
発表者: 山崎 教昭; 白川 健
講演題目: Control problems of phase
field systems associated with total
variation energy
開催期間: 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年
09 月 25 日
開催地: 愛媛大学城北キャンパス
(愛媛県・松山市)
23. 会議名: Workshop "DIMO-2013" Diffuse
Interface Models
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.;
Moll, J. S.
講演題目: Coupling models of phase
transitions and grain boundary
motions
開催期間: 2013 年 09 月 10 日 ~ 2013 年
09 月 13 日
開催地: Hotel Bellavista, Levico
(Italy)
24. 会議名: Equadiff 13
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.
講演題目: Energy-dissipations in
multidimensional Kobayashi-Warren-
Carter models of grain boundaries
開催期間: 2013 年 08 月 26 日 ~ 2013 年
08 月 30 日
開催地: Charles University in Prague,

- Prague (Czech Republic)
25. 会議名: The 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations
発表者: Shirakawa, K.; Moll, J. S.; Watanabe, H.
講演題目: Phase field systems of grain boundaries with solidification effects
開催期間: 2013年08月21日~2013年08月23日
開催地: Hokkaido University, Sapporo (Japan)
26. 会議名: Nonlinear Partial Differential Equations -On the occasion of J. M. Mazon's 60th birthday -
発表者: Shirakawa, K.; Moll, J. S.
講演題目: A phase field system of grain boundary generated by unknown-dependent total variation
開催期間: 2013年07月01日~2013年07月05日
開催地: University of Valencia, Valencia (Spain)
27. 会議名: 2013 日本数学会年会 (実函数論分科会)
発表者: 白川 健; Moll, J. S.
講演題目: 結晶粒界の一般多次元フェーズ・フィールドモデルに対する解の存在定理
開催期間: 2013年03月20日~2013年03月21日
開催地: 京都大学吉田キャンパス (京都府・京都市)
28. 会議名: 2013 日本数学会年会 (実函数論分科会)
発表者: 佐藤 直紀; 愛木 豊彦; 村瀬 勇介; 白川 健
講演題目: 吸着現象を表すある1次元自由境界問題の時間大域解の存在について
開催期間: 2013年03月20日~2013年03月21日
開催地: 京都大学吉田キャンパス (京都府・京都市)
29. 会議名: 第38回発展方程式研究会
発表者: 佐藤 直紀; 愛木 豊彦; 村瀬 勇介; 白川 健
講演題目: 吸着現象を表すある1次元境界問題の解の存在について
開催期間: 2012年12月22日~2012年12月24日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス (東京都・文京区)
30. 会議名: 第38回発展方程式研究会
発表者: 白川 健; Moll, J. S.
講演題目: 結晶粒界の Kobayashi-Warren-Carter モデルの一般多次元における解の存在
開催期間: 2012年12月22日~2012年

- 12月24日
開催地: 日本女子大学目白キャンパス (東京都・文京区)
31. 会議名: 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences
発表者: Shirakawa, K.; Moll, J. S.
講演題目: Solvability for Kobayashi-Warren-Carter models of grain boundaries in general multi-dimensional spaces
開催期間: 2012年11月05日~2012年11月09日
開催地: Kansai Seminar House, Kyoto (Japan)
32. 会議名: 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences
発表者: Sato, N.; Aiki, T.; Murase, Y.; Shirakawa, K.
講演題目: Solvability for a free boundary problem on adsorption
開催期間: 2012年11月05日~2012年11月09日
開催地: Kansai Seminar House, Kyoto (Japan)
33. 会議名: 12th International Conference on Free Boundary Problems: Theory and Applications
発表者: Shirakawa, K.; Watanabe, H.
講演題目: A phase field system motivated by grain boundary motion with degeneracy
開催期間: 2012年06月11日~2012年06月15日
開催地: Frauenchiemsee (Germany)

上記以外で、海外でのセミナー発表が3件、国内でのセミナー発表が6件

〔図書〕(計0件)

なし

〔産業財産権〕

なし

〔その他〕

ホームページ等

研究者個人のページ <http://kenboich.jp/>
教育学部研究活動報告

<http://www.education.chiba-u.jp/approach/facultyact/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

白川 健 (SHIRAKAWA, Ken)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号: 50349809

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし