様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年 　６ 月 　８ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４０１００

研究課題名（和文）非線形楕円型方程式の解構造の解明と定性理論の新展開

研究課題名（英文）Solution structures of nonlinear elliptic PDEs and new perspective of qualitative theory

研究代表者
宮本　安人（Miyamoto, Yasuhito）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：９０３７４７４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形楕円型偏微分方程式の正値解の構造に関する研究を行った．特に，正値解のなす分岐図式を研究した．主に２つの成果を得た．１つ目は，ディリクレ問題について領域を適切に変形することによって，分岐図式内の分岐点で不完全分岐が起きることを証明した．２つ目は優臨界と呼ばれる楕円型方程式の正値球対称解のなす分岐図式を研究した．ディリクレ問題については，ほぼ完全な分類理論を完成させた．ノイマン問題についてはスカラーフィールド方程式に対し，部分的な結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：I studied the structure of the positive solutions of nonlinear elliptic PDEs. In particular, I studied bifurcation diagrams. Mainly, two results were obtained. I proved that the imperfect bifurcation occurs in the bifurcation diagram of the positive solutions of the Gel'fand problem when the domain is perturbed. I almost completely classified the bifurcation diagrams of the positive radial solutions of the Dirichlet problem of supercritical elliptic PDEs in a ball. I obtained partial results about the bifurcation diagram of the positive radial solutions of the Neumann problem of the supercritical scalar field equation in a ball.

研究分野：大域解析学

キーワード：優臨界　分岐理論　非線形楕円型方程式　非線形解析　ノイマン問題　ディリクレ問題　Joseph-Lundgren指数

１．研究開始当初の背景

(1) 非線形楕円型偏微分方程式の正値解の構造（分岐図式）は非線形項の増大度に大きく依存していることが知られている．具体的には，臨界ソボレフ指数と呼ばれる指数があり，それより非線形項の増大度が，小さい，等しい，大きいに応じてそれぞれ，劣臨界（または亜臨界），臨界，優臨界（または超臨界）と呼ばれており，解構造が異なっている．劣臨界の場合は，古典的な変分法が有効で，これまでの約５０年間にわたる研究で既に多くのことが知られている．臨界の場合は，埋め込み写像がコンパクト性を失うという問題があるものの，９０年代に大きく発展した爆発解析によって研究が進み，いろいろ解構造があることが現在では知られている．一方，優臨界の場合は，変分法などの有効な方法が存在せず，その解構造は特殊ないくつかの例（すべて Dirichlet 問題）を除いて未解明であった．また，埋め込みが存在しないことが技術的理由なのか本質的理由なのかが明確には意識されることは少なかったと思われる．そこで現在まで膨大な先行研究があるスカラーフィールド方程式の Neumann 問題の場合について，優臨界の場合の解構造（分岐図式）は興味ある問題であった．なぜなら，今まで知られている劣臨界や臨界の場合の結果と比較しやすいからである．

(2) 非線形項が指数増大する楕円型方程式は，(1)と同様に優臨界であるため Gel’fand 問題を除いて解構造は未知であった．

(3) 非線形項の主要部が冪でも増大度が優臨界の場合は，(1)と同様に Joseph-Lundgren の研究や他のいくつかの先行研究を除いて未知であった．

(4) J. Shi 氏による研究によって，一般的な写像において不完全分岐が起こるための関数解析的な定理が既に知られていたが，定理には「非退化条件」が仮定されていた．これは楕円型方程式では確認することが極めて困難な条件であり，現実的には使用することが難しい定理であった．

２．研究の目的

楕円型偏微分方程式の研究において定性的理論の新しい展開を模索し，新たな研究領域を切り開くことが目標である．具体的には，これまで注目されることが比較的少なかった解の分岐構造に着目し，非線形項や領域との対応関係を明らかにする．

(1)(2)(3) 球領域上の優臨界楕円型偏微分方程式の正値球対称解の分岐構造を明らかにする．具体的にはとり得る分岐構造を全て列挙・分類し，非線形項と分岐構造との間の対応関係を明らかにする．特に(1)の Neumann 問題の場合は，劣臨界の場合は，矢ヶ崎一幸氏と筆者による先行研究で分岐図式が知られている．臨界の場合は，Adimurthi 氏等の研究で解構造が空間次元によって変わることなどが知られている．そこで，優臨界の場合を調べることによって，これらの先行研究との違いを明らかにすることが目的である．

(4) 確認することが難しい「非退化条件」の代わりに，実際に応用するときに確認しやすい条件を課して，不完全分岐定理を証明する．さらに，非線形楕円型偏微分方程式の応用例を提示する．

３．研究の方法

(1)(2)(3) 優臨界の方程式は非線形項の処理にソボレフの埋め込み定理が使えないため一般的な変分法が適用できない．そこで，球領域上の球対称解に限定することによって偏微分方程式を常微分方程式に帰着させる．さらに，様々な先行研究から優臨界の場合では，特異解が重要な役割を担っていることが知られているので，特異解の性質について詳しく調べる．分岐図式については特異解と通常の解との交点数を用いて調べる．

(4) J.Shi 氏の証明を参考に，非退化条件の代わりとなる確かめることが可能な条件を模索する．また零等高線の方法によって分岐枝が大域的な性質を明らかにする．

４．研究成果

(1) 球領域上の優臨界スカラーフィールド方程式の Neumann 問題の正値球対称解の分岐構造について研究した（雑誌論文①）．特に増大度が臨界ソボレフ指数より大きく Joseph-Lundgren 指数より小さい場合の分岐構造を決定した．具体的には加算無限個特異解が存在し，各特異解を持つ値の周囲で分岐枝が無限個折り返し点を持つことが明らかになった．よってパラメータが特異解の値に等しいときは正値球対称解が無限個存在することを示した．臨界ソボレフ指数より少し大きい指数の場合については先行研究があるが，大幅に大きい指数の場合は皆無であった．この研究は優臨界 Neumann 問題の分岐図式の最初の例であり，Joseph-Lundgren 指数の出現など分岐図式の研究に新たな視点を与えるものになると思われる．増大度が Joseph-Lundgren 指数より大きい場合については部分的な結果しか得られていないので，今後の目標である．また，ユークリッド空間以外の，近年注目されている球面上の領域や双曲空間内の領域における楕円型方程式の解構造ついても興味深い研究対象であり，今後の課題である．

(2) 球領域上の指数増大する非線形項を持つ楕円型方程式の Dirichlet 問題の正値球対称解の分岐構造について研究した（雑誌論文②）．非線形項が指数関数の場合は空間次元が３≦Ｎ≦９とＮ≧１０で構造が異なるこ

とが知られていたが，指数関数でなくても指数増大する非線形項で適切な仮定の下で，同じ分岐構造を持つことを示した．具体的には，空間次元が３≦Ｎ≦９の場合は特異解の周りで分岐枝が無限個折り返し点を持つが，Ｎ≧１０の場合は，非線形項について適当な条件の下，分岐枝の折り返し点は存在しないことが明らかになった．従って，主要部が指数関数ならば，低次の摂動によって解構造は大きく変わらないことが分かった．この適切な仮定を外し，任意の指数増大する非線形項の場合の分岐図式の分類は今後の課題である．また，Neumann 問題も今後の課題である．

(3) 球領域上の非線形項の主要部が冪となる楕円型方程式の正値球対称解の分岐構造について研究した（雑誌論文④）．Joseph-Lundgren によって非線形項が$(u+1)^p$の場合は，空間次元が３≦Ｎ≦１０とＮ≧１１で２種類の構造があることが知られていたが，一般的な非線形項の場合には，これとは別にもう１つ解構造があり，全部で３種類あることを発見した．それらをタイプＩ，ＩＩ，ＩＩＩと名付けた．そのうちタイプＩについて次の決定的な結果を得た：増大度がJoseph-Lundgren 指数未満ならば常に分岐図式はタイプＩとなる．また，３種類の解構造は特異解のモース指数と深く関係していることを明らかにした．タイプＩＩは，Brezis-Vazquez による先行研究で非線形項に関する十分条件が解明されている．最後のタイプＩＩＩについて，このような例が実際に存在することを示した．しかし，詳しい性質の解明が今後の課題である．

(4) 雑誌論文⑤は，解析的な一般的な写像において不完全分岐が起こるための関数解析的な定理を証明した．この定理では「非退化条件」の代わりに解析性が仮定されている．これは実際の問題に適用するときに確認しやすい条件である．さらにその定理を円環領域における Liouville 方程式に適用し，領域を摂動させることによって，不完全分岐が起きることを証明した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計１２件）

① Y. Miyamoto, Structure of the positive radial solutions for the supercritical Neumann problem $\varepsilon^2\Delta u-u+u^p=0$ in a ball, The special issue for the 20th anniversary, the Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo（査読有），掲載受理.

② Y. Miyamoto, Classification of bifurcation diagrams for elliptic equations with exponential growth in a ball, Annali di Matematica Pura ed Applicata（査読有），掲載受理.
doi: 10.1007/s10231-014-0404-8

③ Y. Miyamoto, Nonradial maximizers for a H'enon type problem and symmetry breaking bifurcations for a Liouville-Gel'fand problem with a vanishing coefficient, Mathematische Annalen（査読有），**361** (2015), 787-809.
doi: 10.1007/s00208-014-1089-4

④ Y. Miyamoto, Structure of the positive solutions for supercritical elliptic equations in a ball, Journal de Math'ematiques Pures et Appliqu'ees（査読有），**102** (2014), 672-701.
doi: 10.1016/j.matpur.2014.02.002

⑤ T. Kan and Y. Miyamoto, Analytic imperfect bifurcation theorem and the Liouville-Gel'fand equation on a perturbed annular domain, Mathematische Nachrichten（査読有），**286** (2013), 1142-1166.
doi: 10.1002/mana.201100213

⑥ Y. Miyamoto, Symmetry breaking bifurcation from solutions concentrating on the equator of Sn, Journal d'Analyse Mathematique（査読有），121 (2013), 353-381.
doi: 10.1007/s11854-013-0039-5

⑦ Y. Miyamoto, A planar convex domain with many isolated "hot spots" on the boundary, Japan Journal of Indudstrial and Applied Mathematics（査読有），**30** (2013), 145-164.
doi: 10.1007/s13160-012-0091-z

⑧ Y. Miyamoto and K. Yagasaki, Monotonicity of the first eigenvalue and the global bifurcation diagram for the branch of interior peak solutions, Journal of Differential Equations（査読有），**254** (2013), 342-367.
doi: 10.1016/j.jde.2012.08.001

⑨ Y. Miyamoto, Asymptotic transversality and symmetry breaking bifurcation from boundary concentrating solutions, Annales de l'Institut Henri Poincar'e, Analyse Non Lin'eaire（査読有），**29** (2012), 59-81.
doi: 10.1016/j.anihpc.2011.09.003

⑩ S.-I. Ei, K. Ikeda, and Y. Miyamoto, Dynamics of a boundary spike for the shadow Gierer-Meinhardt system, Communications on Pure and Applied Analysis（査読有），**11**, (2012), 115-145.
doi: 10.3934/cpaa.2012.11.115

〔学会発表〕（計２５件）

① 宮本安人, A planar convex domain with many isolated hot spots on the boundary,

談話会，2014年5月19日，東北大学．

② Y. Miyamoto, Structure of the positive radial solutions for a supercritical Neumann problem in a ball, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, March 28, 2014, Pusan Univ. (Korea).

③ 宮本安人, Stable patterns and the nonlinear "hot spots" conjecture, 談話会, May 31, 2013, 東京大学大学院数理科学研究科.

④ Y. Miyamoto, Stable patterns and Morse index one solutions, AIMS Conference, July 2, 2012, Orland (USA).

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

宮本　安人（MIYAMOTO, Yasuhito）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：９０３７４７４３