様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４０１０１

研究課題名（和文）非線形拡散項を伴うロトカ・ボルテラ系に対する数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis for the Lotka-Volterra system with nonlinear diffusion

研究代表者
久藤　衡介（Kousuke, Kuto）

電気通信大学・情報理工学（系）研究科・准教授

研究者番号：４０３８６６０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：非線形拡散項を伴うロトカ・ボルテラ系の定常解の大域構造に対する解析を行った。とりわけ、非線形拡散項の係数を無限大にした際の定常解の漸近挙動を特徴づける極限系に注目して、極限系の非定数解の集合が形成する曲線（大域分岐曲線）を関数空間内に描写した。成果の一例として、交差拡散を無限大とする極限系で、係数パラメーターがラプラス作用素の第２固有値に近づくと、未知関数の一成分が発散することを証明した。

研究成果の概要（英文）：This research studied the global structure of stationary solutions to the Lotka-Volterra system with nonlinear diffusion. Among other things, this research focused on the limiting system as the nonlinear diffusion term tends to infinity, which characterizes the limiting behavior of stationary solutions, and derived the curve of the set of non-constant solutions to the limiting system (the global bifurcation curve) in a functional space. As an example of results, this research proved that an element of unknown functions blows up as a bifurcation parameter approaches the second eigenvalue of the Laplace operator.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形拡散　数理生物学モデル　楕円型方程式　分岐　極限系　移流　拡散の相互作用

１．研究開始当初の背景

同じ地域に棲息する利害関係のある２種類の生物の個体群密度がなす時空的ダイナミクスを数理モデル化する際、それぞれの種の個体群密度を未知関数とするロトカ・ボルテラ系に線形の拡散項（ラプラシアン）のみを付けるのが 1970 年代までの主流であった。しかし、このモデル化では、拡散項はそれぞれの種のランダム拡散のみを反映し、種間の利害関係に起因する拡散を反映しない。たとえば、縄張り争いをする２種類の生物種のそれぞれの空間的拡散は、自種の個体群密度のみならず競争相手にあたる他種の個体群密度にも依存すると考える方が自然である。このような他種依存の拡散のモデル化は、1970 年代後半には数理生物学の見地から重定-川崎-寺本によって提唱されている。彼女らは、競争相手が多い場所ほど拡散が促進されるように、ラプラシアンのかかる拡散項に未知関数どうしの積を加えている。このような拡散項における未知関数の相互作用は一般に交差拡散（cross-diffusion）と呼ばれる。1980 年代に三村昌泰教授のグループによって、交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に対する数学的な研究が着手され、その後、この問題は世界的な規模で研究がされるようになった。現在では、この交差拡散系は提唱者への敬意を込め SKT モデルと呼ばれている。このように、SKT モデルに対する数学研究は 30 年以上になるが、拡散の相互作用に対する汎用的な解析方法が確立されていないこともあり、未だ解構造の全貌解明には程遠い状況にある。
たとえば定常問題については、1990 年代に Lou-Ni により交差拡散を無限大にした際の解の漸近挙動を特徴付ける極限系が２つ存在することが示されている。そのうちの片方の極限系に対しては、Lou-Ni-四ツ谷によって研究が進められているが、もう一方の極限系に対しては、本研究開始時点では、ほとんど研究がされていなかった。
また生物種の移動をモデル化する非線形拡散項として、交差拡散とならび有名なのが移流である。細胞性粘菌の集中化を再現しようとするケラー・シーゲル系は 1990 年代以降、国内外で盛んに研究が進められている。しかしながら、移流を伴うロトカ・ボルテラ系は、本研究開始時点で、ほとんど研究がされておらず、たとえば定常問題の解構造に対する解析はほぼ手付かずの状態であった。

２．研究の目的

交差拡散や移流を伴うロトカ・ボルテラ系に対する研究を通じて、反応拡散系における未知関数の相互作用に由来する非線形拡散に対する新たな解析処方を提示することを目的とする。
とくに、ロトカ・ボルテラ系において交差拡散や移流を無限大としたときの解の極限関数は、相互作用の効果を集約することから、拡散の相互作用の解明に重要な手がかりを与えうる。本研究においては、極限関数がみたす系（極限系）の解析に注力し、定常解の集合の大域的構造（分岐ダイヤグラム）の提示を通じて、交差拡散や移流による相互作用のメカニズムを数学的に抽出することを主な目標とする。
具体的には、前述の Lou-Ni によって提唱された SKT モデルの２つの極限系のうち、これまで研究がされてこなかった方の極限系に焦点を当て、SKT モデルの定常解集合の分岐ダイヤグラムの解明に向けて一躍を担う。
移流を伴うロトカ・ボルテラ系に対しては、移流と拡散の係数を一定比で増大させた際、定常解のなす大域分岐曲線がどのように変遷するかを数学的に追跡して、移流項付きロトカ・ボルテラ系の数学解析の突破口とする。
さらに、ロトカ・ボルテラ系の極限系を包括するような積分項付き楕円型方程式に対する解析を通じて、拡散と移流が解に与えるユニバーサルな性質を引き出すことも目的のひとつである。

３．研究の方法

(1) 交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に対する研究の方法

交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ競争系（SKT モデル）の定常問題の一例は、次のような連立の非線形楕円型方程式で表される：

$$\Delta[(\mathbf{1}+\alpha v)u]+u(a-u-v)=0,$$
$$\Delta v+v(b-cu-v)=0.$$

ここで、未知関数 u, v は、ある領域において縄張り争いをしている２種類の生物の定常的な個体群密度を表す。拡散の相互作用項である $\alpha\Delta(uv)$ が、交差拡散を表し、未知関数 u に対応する種が、競争相手である v に対応する種の少ない場所へ拡散する傾向を模している。上記のシステムに対する研究者の共通の興味は、交差拡散係数 α と解 u, v の関連性を解き明かすことである。その見地で上述の Lou-Ni の研究では、領域の境界では生物種の出入りがないという設定（ノイマン境界条件）の下で、交差拡散係数 α を無限大としたときの、定常解の極限関数がみたす系（極限系）が２つあることを証明されている。そのうちの片方の極限系は種の棲み分けを特徴付け、Lou-Ni-四ツ谷などによって解析が進められている。
しかし、もう一方の極限系についてはあまり研究がされていなかった。その極限系は、α を無限大としたとき、αv がある正値関数 w に収束するケースを特徴付ける。すなわち、交差拡散効果を備えない種 v が、競争相手の交差拡散係数 α の増大に伴い、その係数に反比例して減衰する状況を示唆しており、具体的には、次のような連立の楕円型方程式からなる：

$$\Delta[(\mathbf{1}+w)u]+u(a-u)=0$$
$$\Delta w+w(b-cu)=0. \qquad \text{(L1)}$$

本研究では、以下に述べる方法で、極限系の非定数解の集合を大域的に追跡した。非定数解を観測する断面として、係数 b を分岐パラメーターとして採用した。端的には、
係数 b を変化させたとき、その係数と非定数解（ u, w ）との対応を適当な関数空間内で描写する狙いである。
まず、$b=ac$ のケースで反応項が退化して、定数解の枝（ u, w）=（ a, t）（ $t>0$ ）が現れることに注目した。そこで、分岐理論を用いて、この定数解の枝から分岐する小振動解を局所的に捉えた。
次にパラメーター b の値を ac から徐々に遠ざけたとき、小振動解が関数空間内でどのように変化するのかを追跡した。すなわち、小振動解の局所分岐枝を延長して得られる大域分岐枝の振る舞いを解析した。
具体的には、最大値原理やエネルギー法で得られるアプリオリ評価と Lopez-Gomez らによって開発された現代的な大域分岐理論を組み合わせて、大域分岐曲線が(u, w, b ）空間内でどの成分について有界なのはどの成分について非有界なのかを調べた。
最後に、楕円型方程式に関するブロウアップ議論を用いて、大域分岐枝が w 成分に関する非有界性を考察し、枝が爆発する b の値を探した。

(2) 移流を伴うロトカ・ボルテラ系に対する研究の方法

移流項をもつロトカ・ボルテラ競争系の定常問題の一例は次のような連立の非線形楕円型方程式となる：

$d\Delta u+u(a-u-v)=0$

$D\nabla(\nabla v+\beta v\nabla \boldsymbol{u})+v(b-cu-v)=0$

このとき、β のかかる項が移流を表し、v に対応する生物種が、競争相手である $\boldsymbol{u}$ の多い場所から少ない場所に移動する状況をモデル化している。
本研究においては、上記の定常問題の非定数解の存在について考察した。拡散係数 $\boldsymbol{d}$ をパラメーターとして、非定数解がどのような $\boldsymbol{d}$ の範囲で存在するのかあるいは存在しないのかを写像度の理論を用いて解析した。
その際、解に対するアプリオリ評価と定数解周りの線形化を利用して、定数解のインデックスを計算することが証明の重要なステップである。また、上記の反応拡散移流系において、パラメーターD を大きくしたときの非定数解の漸近挙動を考察した。パラメーターD は生物種の拡散と移流の係数に対応するので、Dを大きくすることは、v に対応する種の空間的な活動性を活発にすることにあてはまる。
技術的には D を大きくしたときの、非定数解の極限関数がみたす極限系に注目した。その極限系は、次のような指数関数の非線形項をもつ単独の楕円型方程式

$d\Delta u+u(a-u-\lambda\exp(-\beta \boldsymbol{u}))=0$

と未知関数に対する積分方程式で構成される。この極限系においては、未知関数は u のみであって、v は未知数λに転化する。なお、非線形項は双安定形に分類される。
この極限系の解構造を得るために、まずは上記の楕円型方程式をノイマン境界条件下で考察した。その際、d をメインパラメーターとして採用し、λ は副次的なパラメーターとして扱った。具体的には、まず λ を固定して、d を動かして、非定数解が定数解から分岐したのちに、どのように形状を変化させるかを追跡した。そこで得られた d をパラメーターとした分岐曲線を、各 λ について並べて（d ,λ）と解 u の対応を関数空間内での曲面として描写した
次に、楕円型方程式の解集合として得られたこの曲面から楕円型方程式をみたす部分集合を抜き出すことで、極限系の解集合が形成する大域分岐曲線を得た。

(3) 積分項を伴うアレン・カーン方程式に対する研究の方法

前項で述べたように、移流項を伴うロトカ・ボルテラ系において、拡散と移流を無限大とする極限系を導出すると、単独の楕円型方程式と積分方程式のシステムとなる。このような双安定形の非線形項をもつ楕円型方程式と積分方程式の組み合わせは、さまざまな数理モデルに現れる反応拡散移流系で拡散と移流を無限大とした極限系で現れる。したがって、双安定形非線形項をもつ楕円型方程式の典型としてアレン・カーン方程式を選び、積分方程式とのシステムを考察することは、拡散と移流が解に与える基盤的性質を引き出す期待がもてる。
その意味で、本研究では、前述のロトカ・ボルテラ系に対する解析方法の一般化を主眼として、アレン・カーン方程式と積分方程式のシステムを解析した。

４．研究成果

(1) 交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に対する研究成果

研究の方法(1)で述べたように、SKT モデルの定常問題において、交差拡散係数を無限大とした極限系(L1)を解析した。特筆すべき研究成果として、空間１次元では、非定数な解の集合が形成する大域分岐枝の概形を得た。
既述のように、極限系（L1）を b をパラメーターとして考察すると，$b=ac$ のときに反応項が退化して，定数解が形成する半直線集合（ u, w）=（ a, t）が現れる。ここで t が正の範囲を任意に動くので、$b=ac$ では定数解のなす集合は w 成分に関して非有界である。
本研究によって、この退化値 ac が非定数解の存在と非存在を分ける閾値を与えていることが判明した。まず、b が ac より大きいときは極限系（L1）の解が存在しないことが示された。そして、ac がマイナスラプラシアン

の第２固有値より大きいときには、b がその固有値と ac の間にあれば、単調な非定数解が存在することが証明できた。具体的には、単調な非定数解が形成する集合は、$b = ac$ で定数解が形成する直線から $b < ac$ の方向に分岐する。さらに、分岐した非定数解の曲線は連結集合として、b が第２固有値と ac の間にある限り延長出来る。そして b が ac に近づくにつれ、非定数解の w 成分が大きくなり、$b = ac$ においては、$\boldsymbol{w}$ 成分は空間変数に関して一様に爆発する。結局、極限系 (L1) の非定数解の大域分岐枝は $b = ac$で正値定数解から左向きに分岐し、b が第２固有値のときに$\boldsymbol{w}$ 成分が爆発させることが証明できた。さらに、この爆発現象をより高精度に解析するために、w をその最大値で割った正規化関数に注目し、b が第２固有値に近づいたときの正規化関数の漸近挙動を引き出した。その結果、正規化関数の漸近挙動は、Lou-Ni-四ツ谷によって研究されてきたもうひとつの極限系の解が b が第２固有値に近づいたときの漸近挙動に一致することが判明した。この一致は、SKT モデルに対する交差拡散無限大の２つの極限系の解集合は、b をパラメーターと見なすと、マイナスラプラシアンの第２固有値でつながっていることを意味する。この成果は、２つの極限系の関連性に初めて言及している。

(2) 移流を伴うロトカ・ボルテラ系に対する研究成果

移流項をもつロトカ・ボルテラ競争系については、研究の方法(2)に記載した定常問題の非定数解が存在するための係数に対する十分条件を得た。その結果、拡散係数 $\boldsymbol{d}$ がある程度大きいと非定数解が存在しないが、0 の近くでは非定数解が存在するような $\boldsymbol{d}$ の区間が無限個存在することが分かった。とくに、拡散や移流を外した常微分方程式の意味で定数解が安定なケースでは、線形の拡散項を付加しても非定数解が存在しないことが知られていたが、本研究の結果で、移流がある場合は状況が一変し、非定数解が出現することが判明した。また、研究の方法(2)で述べたように、移流項を伴うロトカ・ボルテラ競争系においては、拡散と係数を一定比で無限大とした極限系の解析に注力した。その結果、空間１次元では極限系の定常解構造を決定することができた。具体的には、非定数解の集合が形成する大域分岐曲線は、反応項の係数に応じて、($\boldsymbol{d}$, λ , u) 空間に描写でき、概ね、分岐曲線の形状は次の３種類に分類される：

１つ目は、定数解と境界遷移層をもつ特異摂動解をつなぐ分岐曲線、２つ目は定数解と内部遷移層をつなぐ分岐曲線、そして３つめは境界遷移層をもつ特異摂動解と内部遷移層をもつ特異摂動解をつなぐ分岐曲線である。なお、これら３つのタイプの分岐曲線は反応項の係数に関して連続的に変化する。例えば３つ目の、内部遷移層をもつ特異摂動解と境界遷移層をもつ特異摂動解をつなぐサドルノード型分岐曲線は、反応項のある係数を増加させると小さくなるが、その過程で内部遷移層の位置が境界に近づき、サドルノード曲線の両足先（両端）に対応する異なる特異極限の間隔が狭まっていく。

なお、この極限系の解析を通じて、異なる特異極限をつなぐサドルノード型分岐曲線が出現させる一般的な数学要因を見出すことができた。一般に、双安定な非線形項をもつ楕円型方程式は、λに対応するパラメーターを動かすことで、２つの定数解のエネルギー差が変化して、その差が符号変化する閾値で特異摂動解の形状が劇的に変化することが知られている。反応拡散系の極限系においては、それらの特異摂動解たちの中から積分条件をみたすものだけを選ぶことになる。言い換えると、楕円型方程式の解集合が形成する関数空間内の曲面から、積分条件に対応する等高線を切り出すことで、極限系の解がなす分岐曲線を抽出できる仕組みになっている。このとき、上記の閾値付近においては、特異摂動解の変化が激しく、曲面が半ば裂けたような状態になっており、このことが、積分条件に対応する等高線を釣り針状のサドルノード型曲線にする要因であることが、今回の研究で示された。

(3) 積分項を伴うアレン・カーン方程式に対する研究成果

上記(2)の後半に記述したように、異なる特異極限をつなぐサドルノード型の分岐曲線は、ロトカ・ボルテラ系の極限系を包括する一般の積分項付き双安定形方程式に現れる。

そこで本研究では、双安定型非線形項の典型としてアレン・カーン方程式をとりあげ、積分条件の下での解構造を研究した。その結果、安定定数解のエネルギーの差と拡散係数をパラメーターとして、非定数解の集合が形成する大域分岐曲線を描写することができた。具体的には、アレン・カーン方程式の解集合から積分条件をみたす関数を選び出すことにより、例えば、境界遷移層をもつ特異摂動解と内部遷移層をもつ特異摂動解をサドルノード型分岐曲線でつなぐことに成功した。

また、積分条件にある種の対称性があると、２つの定数解のエネルギーが等しい場合に、楕円型方程式の解が対称性をもつため、それらの対称解が積分条件を自動的にみたすことになる。この場合、積分項をもつアレン・カーン方程式について、対称解の集合から非対称な解が分岐する現象（対称性破壊分岐）が起こることが証明できた。さらにこの分岐点は対称性破壊分岐と不完全分岐の２つの性質を併せもつことも判明した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計６件）

① Tohru Tsujikawa, Kousuke Kuto, Yasuhito Miyamoto and Hirofumi Izuhara, Stationary solutions for some shadow system of the Keller-Segel model with logistic growth, Discrete and Contin. Dyn. Syst S, Vol.8, (2015) 掲載決定, 査読有.

② Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa, Limiting structure of steady-states to the Lotka-Volterra competition model with large diffusion and advection, J. Differential Equations, Vol.258, (2015), pp.1801-1858, 査読有. doi:10.1016/j.jde.2014.11.016

③ Kousuke Kuto and Tohru Tsujikawa, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model: II. Shadow system, Nonlinearity, Vol.26, (2013), pp. 1313-1343, 査読有. doi:10.1088/0951-7715/26/5/1313

④ 久藤衡介, Bifurcation structure of stationary layers for generalized Allen-Cahn equations with nonlocal constraint, 数理解析研究所講究録, 1838 巻 (2013), pp. 102-115, 査読なし. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1838-08.pdf

⑤ Kousuke Kuto and Yoshio Yamada, On limit systems for some population models with cross-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst.B, Vol.17, (2012), pp.2745-2769, 査読有. doi:10.3934/dcdsb.2012.17.2745

⑥ Kousuke Kuto, Koichi Osaki, Tatsunari Sakurai and Tohru Tsujikawa, Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol.241 (2012), pp.1629-1639. 査読有. doi:10.1016/j.physd.2012.06.009

〔学会発表〕（計９件）

① 久藤衡介, Limiting structure of shrinking solutions to the stationary SKT model with large cross-diffusion, 日本数学会 2014 年度総合分科会函数方程式論分科会一般講演（広島大学東広島キャンパス）講演アブストラクト, pp.84-85, 2014.9.26.

② Kousuke Kuto, Limiting structure of steady-states to the Lotka-Volterra system with large diffusion and advection, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Universidad Autonoma de Madrid, Spain), 2014.7.10.

③ Kousuke Kuto, On a shadow system of the Lotka-Volterra completion model with cross-diffusion, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Universidad Autonoma de Madrid, Spain), 2014.7.7.

④ Kousuke Kuto, Coexistence steady-states to the Lotka-Volterra competition model with diffusion and advection, Conference on reaction diffusion equations for ecology and related problems, KAIST, Daejeon, 韓国, 2013.10.25

⑤ 久藤衡介, Coexistence steady-states of the Lotka-Volterra competition model with diffusion and advection, 日本数学会 2013 年度総合分科会函数方程式論分科会一般講演(愛媛大学城北キャンパス) 講演アブストラクト, pp.84-85, 2013.9.26.

⑥ Kousuke Kuto, Bifurcation structure of stationary solutions of the Lotka-Volterra competition model with diffusion and advection, One Forum, Two Cities 2013: Aspect of Nonlinear PDEs, 早稲田大学西早稲田キャンパス, 2013.9.18.

⑦ Kousuke Kuto, Stationary solutions of the Lotka-Volterra competition model with diffusion and advection, Workshop on Nonlinear Equations in Population Biology, 華東師範大学　偏微分方程式センター（中国,上海市), 2013.5.27.

⑧ 久藤衡介, Bifurcation structure of stationary layers for generalized Allen-Cahn equations with nonlocal constraint, RIMS 研究集会「常微分方程式の大域的定性理論とその応用」, 数理解析研究所, 2012.11.8.

⑨ Kousuke Kuto, Bifurcation structure of steady-states to a reaction-diffusion-advection system in surface chemistry, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Orlando, Florida), 2012.7.3.

〔その他〕

ホームページ

http://www.kuto.e-one.uec.ac.jp/

６．研究組織

(1)研究代表者

久藤　衡介（KUTO, Kousuke）
電気通信大学・情報理工学研究科・准教授
研究者番号：４０３８６６０２