

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：23201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740106

研究課題名(和文)非線型波動場における時間大域的性質の解析

研究課題名(英文)An analysis on time global properties of solutions to nonlinear wave equations

研究代表者

土井 一幸 (Kazuyuki, Doi)

富山県立大学・工学部・講師

研究者番号：80608331

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：初期値問題の解に対する時間大域的性質の解析は偏微分方程式における基本的問題の一つである。本研究課題では、非線型分散型方程式および非線型双曲型波動方程式について、解の時間大域性について考察を行った。

非線型分散型方程式については、初期値を具体的な関数に限定し、そのときの解の時間大域的性質を調べた。

非線型双曲型方程式については、ある条件下において小さな初期値に対する時間大域性を示すための証明を、従来の研究結果から改善した(共同研究)。

研究成果の概要(英文)：We studied time global properties of solutions for nonlinear dispersive and wave equations, respectively.

For nonlinear dispersive equations, we investigated time global properties of special solutions with a spacial function as the initial data.

For nonlinear wave equations, we presented an improvement of the proof on the existence of small data solutions with the null condition given by Yokoyama in 2000.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：非線型波動 時間大域解

1. 研究開始当初の背景

非線型光学において、物質にレーザー光を照射すると、光は電磁波なので電場と磁場の相互作用により物質中の荷電粒子が運動する。これにより物質中に分極が誘起されるが、レーザー光の強度を上げると、非線型応答を無視できなくなり、分極も非線型性を考慮する必要が生じる。特に3次の非線型分極の効果により、媒質の屈折率が光の強度に比例するという現象が起きる(非線型屈折率効果)。このことから、非線型屈折率が正の場合は光の強度が高いところでより屈折率が大きくなり、媒質があたかも凸レンズのように働きビームが自分自身の作用で集束する自己集束という現象が観測される(下図の上側参照)。このような非線型屈折率効果を考慮した光波の伝播は、非線型シュレディンガー方程式によって記述できる。

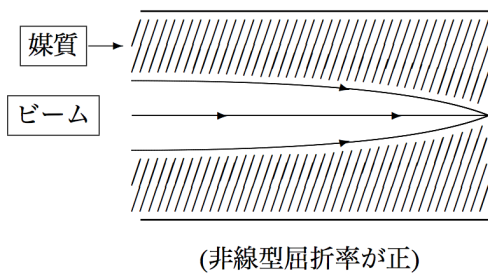
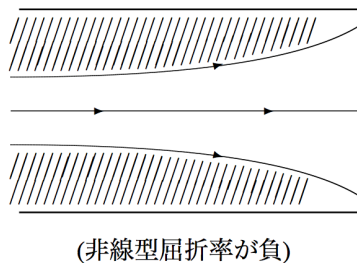


図: ビームの「自己集束が起きる場合」と「散乱が起きる場合」



この方程式は物理的のみならず数学的にも非線型問題に由来すると思われる興味深い性質を有しており、数学や物理学の様々な視点から研究が行われている。本研究課題では、数学、特に非線型偏微分方程式論からのアプローチに基づく解析を行う。非線型偏微分方程式論では、空間次元と非線型項の指数を一般化し、その上で初期値として一般的な関数を与えて可解性や解の長時間挙動を解析する。この方法、すなわち一般的な状況下で考察することによって、一見異なる問題を共通の問題として扱うことが可能になる。これが数学的手法特有の抽象化による汎用性である。しかし一方で、抽象化によって数学的対象が本来有する顕著な性質を埋没させることが起こり得る。例えば、一般的な関数を初期値として考えた場合に、非線型シュレ

ディンガー方程式を含めた非線型波動方程式を持つソリトン解の性質を一般解からも引き出すことは期待できない。そこで、方程式はある程度一般性を持たせながら初期値は具体的なものを与えることで、解の詳細な情報を引き出し、方程式の数学的構造を研究するというアプローチが考えられる。

2. 研究の目的

(1) 初期値問題の解に対する時間大域的性質の解析は偏微分方程式における基本的問題の一つである。この問題を踏まえ、本研究では数理物理に現れる非線型波動のモデル方程式について、一般性を多少犠牲にしても数学的なアプローチから解の物理的性質を探ることを目的とする。例えば、非線型光学において、光ファイバーを伝わる波の様子は近似的に非線型シュレディンガー方程式で記述される。この解をフーリエ空間ではなく物理空間の視点から解析し、さらには解の振動を積分して理解するのではなく各時刻で理解することを試みる。

(2) また、研究の進捗状況に応じて、上記のような非線型分散型方程式の理解を深めるため、従来から行われてきた非線型双曲型波動方程式の時間大域的性質についての解析方法の再検討も行う。特に、非線型項のうちで共鳴項と呼ばれる部分に良い性質を課した状況下において、非共鳴項の処理を容易にするような解の重み付き各点評価について改善を試みる。

3. 研究の方法

(1) 非線型シュレディンガー方程式をはじめとした非線型分散型方程式について、平面波を重ね合わせた関数を初期値とした問題を考える。この問題に対する解の形をある程度見積もった上で、線型的性質を持つ因子と非線型的性質を持つ因子に分ける。そして、非線型的性質を持つ因子についての時間大域的性質を解析することにより、元の問題の解が持つ時間大域的性質を論じる。また、従来の研究で得られているその他の具体的な関数を初期値を与えた場合の考察との比較等も行う。

(2) 非線型波動方程式については、空間3次元における2次の非線型項を持つ場合を主として考察する。この問題に対し、相互作用の影響が大きい部分が現れないような条件の下で、従来から得られている小さな初期値に対する解が時間大域的に存在することの証明を再検討する。そのために、斉次波動方程式の解を微分した関数の重み付き各点評価について改善を試みる。

4. 研究成果

(1) 初期値を平面波(の重ね合わせ)として、時間変数(実際のモデル方程式においては空

間変数を意味する)に依存する消散項を加味した非線型シュレディンガー方程式について、「3. 研究の方法 (1)」にて述べた方法により、ある程度具体的に表示できる解の存在性、及びその時間大域的な性質を得た。具体的には、非線型項が解を有限時刻で爆発させるような効果を持つ場合にも、非線型性に依拠して消散項が(時間大域的に捉えて)ある程度の大きさを持てば、小さな初期値(平面波の重ね合わせ)に対しては時間大域的な解が存在することが明らかになった。一方で、非線型性に依拠して消散項がある程度小さいうちは、如何に初期値を小さくしようと解の有限時刻爆発を防げないという結果も得られた。なお、ここで得られた成果は、消散項の持つ係数が時間に依存せずに一定である場合に得られていた報告者の結果を一般化したものとなっている。以上のことを、本学紀要にて発表した。また、より一般的な初期値に対しての上記問題の考察を行うことも興味深い。これらの考察は今後の研究課題としたい。

(2) (久保英夫氏との共同研究) 空間 3 次元における斉次の波動方程式の解に対する重み付きの各点評価を得た。具体的には、従来から知られていた同方程式の解に対する各点評価に含まれる重みの一部から時間に関する部分を取り除くことができた。これにより、空間次元が 3 で非線型項の次数が 2 の非線型波動方程式(系)の非共鳴項のうちで性質の良くないものの処理が従来よりも容易になった。その結果、共鳴項に零条件を課した上で、小さな初期値に対する時間大域解の存在性の簡潔な別証明を与えることができた。また、上記の各点評価が得られた過程を再検討し、非斉次項に関して必要となる情報量(微分の階数)を減らす形で改善した。また、その証明において考察の不十分であった部分も補った。

(3) 本項目(2)では共同研究によって得られた空間 3 次元における斉次の波動方程式の解に対する重み付きの各点評価を改良したが、ここではその改良の過程を見直し、空間 2 次元における斉次の波動方程式に対しても類似の結果が成り立つかを考察した。この考察の過程で、いくつかの補助的な不等式を得ることができた。しかし、現時点ではこれを適用して問題を解明するところには至らなかった。これについても今後の研究課題としたい。さらに、上記の問題が肯定的に解決された場合、各次元での外部領域上における非線型波動方程式(系)の初期値・境界値問題の小さな初期値に対する時間大域解の存在性について考察することも、今後の課題としたい。

また、本項目(1)では初期値を平面波の重ね合わせとした場合の消散項を付した非線型分散型方程式の解が持つ性質を検討し

たが、非線型シュレディンガー方程式を念頭に置いた上で、初期値を上記同様に平面波の重ね合わせとして消散項の係数を複素数とした方程式(ギンツブルグ・ランダウ方程式)の解の挙動も考察した。これについては、極めて限られた場合においてしか具体的な挙動を得られなかった。しかし、この方程式について最近の文献を見つけることができたため、これを手がかりに今後の研究を進めていきたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

土井 一幸、平面波を初期値とする時間依存型消散項付き非線型分散型方程式について、富山県立大学紀要、査読無、23 巻、2013、25-34
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009579206>

〔学会発表〕(計 4 件)

Kazuyuki Doi, Special solutions of nonlinear Schrödinger equations with some initial data, Gauge theories, integrable models and related topics, 2012 年 7 月 29 日、大妻女子大学(東京都・千代田区)

土井 一幸、波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価の考察、函館偏微分方程式研究集会、2012 年 10 月 7 日、公立はこだて未来大学(北海道・函館市)

土井 一幸、久保英夫、On the weighted pointwise estimates for derivatives of solutions to the wave equation、日本数学会 2012 年度 年会、2013 年 3 月 23 日、京都大学(京都府・京都市)

土井 一幸、波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価について、三大学偏微分方程式セミナー、2013 年 5 月 29 日、中央大学(東京都・文京区)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

アウトリーチ活動情報

(1) 平成26年度 キャリアデザイン・プロジェクトS 大学・病院等連携講座

講師： 土井 一幸

日時：2014年7月7日

場所：富山県立高岡南高等学校（富山県・高岡市）

対象：普通科2年時生

題目：有理数の構成

内容：本研究課題の遂行過程で得られた数学的な知見を紹介した。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土井 一幸 (DOI, Kazuyuki)

富山県立大学・工学部・講師

研究者番号： 80608331