

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 27 日現在

機関番号：24403

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740107

研究課題名(和文)非線形拡散方程式の解の高次漸近展開の構築とその応用

研究課題名(英文)Construction of higher order asymptotic expansions of solutions for nonlinear diffusion equations and its application

研究代表者

川上 竜樹(Kawakami, Tatsuki)

大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20546147

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、全空間において、半線形熱方程式に代表される非線形拡散方程式について、対応する積分方程式を考察することにより、時間大域解の第一漸近形が積分核の定数倍である場合に、初期値のモーメントの次数に応じた線形近似及び非線形項の条件に応じた非線形近似の具体的な構成法を明らかにした。またその応用として、半空間における非線形境界条件付き熱方程式、全空間における非線形消散項付き波動方程式、さらに分数冪拡散方程式についても解の高次漸近展開理論を構築した。

研究成果の概要(英文)：We consider the integral equation with respect to nonlinear diffusion equations, which are represented by semilinear heat equations, in the whole space. Under the condition that solutions of nonlinear integral equations behave like a multiple of the integral kernel asymptotically, we established the method of obtaining the higher order linear asymptotic expansions, which depends on the degree of moment of initial data, and nonlinear asymptotic expansion, which depends on the conditions for the nonlinear term. Furthermore, we applied our arguments to the heat equation with nonlinear boundary condition on the half space, nonlinear damped wave equations in the whole space and fractional diffusion equations in the whole space.

研究分野：数物系科学

キーワード：非線形拡散方程式 高次漸近展開 非線形積分方程式 分数冪拡散方程式 消散項付き波動方程式 動的境界条件

1. 研究開始当初の背景

拡散方程式、特に熱方程式に代表される放物型方程式は関数方程式論や確率、統計などの数学の分野に限らず、多くの分野で取り扱われている方程式の一つであり、もっとも重要な偏微分方程式の一つであることから様々な視点から多くの研究がなされてきた。その中でも解の大域挙動は最も基本的かつ興味深い問題の一つとしてここ40年において国内外問わず多くの研究成果が挙げられている。解析手法としては熱方程式の基本かいや固有関数を用いる手法、解の自己相似性に着目し、ある種のコンパクト性を回復し解析する手法、さらには消散エントロピー法など多岐に渡っており、これらの手法を用いることにより、いつくかも代表的な非線形放物型問題については解が大域的に存在するための初期値や非線形性に対する十分条件、またその際の解の振る舞いについての成果が得られている。また、これら非線形放物型問題に対する結果、特に全空間における半線形熱方程式の解の大域挙動に対する結果は非線形消散項付き波動方程式の研究に対しても応用されており、時間大域解が熱核に収束する結果が得られている。

一方、非線形拡散方程式の研究の核をなしている問題の一つである爆発問題に対して、近年、線形熱方程式の解の高次漸近展開を用いることで爆発集合の対する画期的な研究成果が挙げられていた。これは詳細な解の漸近展開が単に大域解に対する情報を与えるだけでなく、かいが大域的に存在しない爆発問題に対しても重要な情報を与えることを示唆している一例と言える。しかしながら本来考えられている問題は非線形問題であること、また解の形状や最大点挙動を研究する上では線形熱方程式の情報だけでは不十分であり、非線形方程式の解の高次漸近展開を用いることでより詳細な情報を得ることが期待されていたことから、今後の進展が求められていた。

2. 研究の目的

本研究はいくつかの代表的な例を含む一般の非線形拡散方程式に対して、解が熱核に収束する場合について、解の高次線形近似及び高次非線形近似を構築し、その応用・発展として解が基本解に収束することが期待できる問題に対して、その十分条件の検証と高次漸近展開の構築、特に非線形性の抽出及びその表現を行うことを目的とする。主要な研究目的は以下の通りである。

(1) これまで川上は石毛和弘氏、石渡通徳氏との研究に端を発するこれまでにはない新しい解析手法を開発する事により、全空間において冪乗型の非線形性を含む一般の半線形熱方程式に対して、解の漸近展開の第一次近似が熱核であるという仮定の下で初期条件と収束速度の関係性、また解の高次漸近

展開を与え、最適な収束評価を得た。近年、細胞性粘菌の凝集現象を記述するKeller-Segel系や移流拡散方程式など非線形項に解の微分が含まれる問題に対して解の高次漸近展開が盛んに研究されてきている。しかし、この高次展開と初期値の減衰評価との関係性は得られておらず、また非線形項をより一般に拡張した際にどのように高次展開を与えるべきかについては解析できていない。ここでは先に挙げた冪乗型の非線形項を含む半線形熱方程式に対する結果を拡張し、非線形項に解の微分が含まれる場合や反応項が互いに影響し合うような方程式系など、いくつかの代表的な例を含む一般の非線形拡散方程式に対して、初期条件と収束速度の関係、また高次展開の構成法について解明する。さらにより一般の発展方程式への本手法の有用性の足がかりとして、消散項付き波動方程式の解の高次漸近展開についても考察していく。

(2) 半空間における冪乗型非線形境界条件付き熱方程式は解の表現公式を用いて基本解への収束が示されているが、球対称性が導入できない事から全空間における半線形熱方程式ほどの成果は得られていない。ここでは本問題に対して高次漸近展開の構成法を明らかにする事により、本問題と全空間における半線形熱方程式の相違点を解明する。また境界条件が時間発展する問題、すなわち動的境界条件については領域が半空間の場合、領域内部の方程式はラプラス方程式しか扱われていない。ここでは非線形問題の考察の準備として、時間発展する境界条件を持つ半線形楕円型方程式の解の大域挙動を解明する。さらに半空間における動的境界条件に付随する問題として分数冪拡散方程式が現れる。この発展方程式の基本解は熱方程式の基本解である熱核よりも空間遠方での減衰が遅いことが知られている。特に、最も単純な場合である、領域内部がラプラス方程式である動的境界条件を考察する際には half Laplacian と呼ばれる非局所作用素を主要部とする分数冪拡散方程式が現れることが知られている。この方程式の基本解はポアソン核であり、空間遠方では多項式減衰しかしておらず、漸近展開の係数の有界性に対応する解の重み付き空間の可積分性は期待できない。ここでは漸近展開の係数の有界性が期待できない場合の例として half Laplacian を主要部とする場合を中心に解の高次漸近展開の構築を目指す。

3. 研究の方法

本研究では解が基本解に収束することを用いて、非線形性を抽出し表現することで解の高次漸近展開を構築することを目的に、まず解が熱核に収束する場合、全空間における半線形熱方程式に対する考察をもとに、より一

般の非線形熱方程式の初期条件と収束速度の関係の考察並びに解の高次漸近展開の構築、非線形消散項付き波動方程式の漸近解析への応用、半空間における非線形境界条件付き熱方程式の解の高次漸近展開の構築、さらに、熱核以外の基本解への収束が期待される問題に対する新たな展開として分数冪拡散方程式の解の高次漸近展開の構築および時間発展する境界条件付き非線形楕円型方程式の大域挙動について研究を行う。具体的な内容は以下の通りである。

(1) 全空間における非線形拡散方程式の一般化：非線形項に解の微分項を含む場合について初期条件と収束速度の関係、また高次展開の構成法を研究する。これまでの半線形熱方程式に対する研究において、初期値のモーメントの有界性と収束速度の関係性、高次展開の構成法が知られているが、これらの結果に際しては非線形項に解の微分は含まれておらず、非線形項に対する条件の示唆は与えるものの、直接的には適用できない。ここでは移流拡散方程式の解の大域挙動の結果をもとに、非線形項に対する十分条件を求め、その上で、解の微分に対する減衰評価やモーメントの有界性を求め、高次展開を構築する。また Keller-Segel 系や反応拡散方程式系などの幾つかの例について、具体的な高次展開を与える。

(2) 非線形消散項付き波動方程式の漸近解析への応用：3次元以下の全空間における非線形消散項付き波動方程式の解の大域挙動を研究する。特に、ここでは解が熱核に収束する場合について考察する。消散項付き波動方程式は基本解が指数減衰する波動作用素と熱半群に分解できる事から解の大域挙動においては熱半群が支配的になることが示されており、これを用いる事で冪乗型の非線形項については熱核への収束が示されているが、高次漸近展開は得られておらず、非線形性や波動性の抽出には至っていない。これはこれまで対応する非斉次熱方程式の解析が困難であった事に起因すると考えられる。ここでは半線形熱方程式に対する考察をもとに、より詳細に非斉次熱方程式の解析を行う事で初期条件と収束速度の関係と解の高次漸近展開について考察する。

(3) 半空間における非線形境界条件付き熱方程式の高次漸近展開：半空間において外部からの流入が解の冪乗となる境界条件を有する熱方程式に対して、これまで川上は解が大域的に存在するための十分条件並びに基本解への収束を示している。これらの研究を通して、本問題は全空間における半線形熱方程式と類似した構造を持っていることが期待できるため、半線形熱方程式に対して構成した解析手法の改良を通して本問題を考察する。ここでは領域内部と境界それぞれに対

して基本解の情報を精査し、それぞれの項に対してモーメントとの関係や線形近似、非線形近似について研究を行う。

(4) 動的境界条件付き半線形楕円型方程式の大域挙動：境界条件に解の時間微分を含むものを動的境界条件という。本問題に対しては有界領域の場合は解の存在等について幾つかの結果が得られているが、半空間においては方程式がラプラス方程式の場合、境界条件を対応する分数冪拡散方程式に変形する事により解がポアソン核に収束する事が示されているのみであり、半線形楕円型方程式の場合は解の局所存在も得られていない。ここではまず方程式に対応する積分方程式の導出を試みる事により局所可解性を示し、次に大域挙動の考察を行う。

(5) 分数冪拡散方程式の解の高次漸近展開：分数冪拡散方程式はその指数によって基本解の性質が異なることが知られている。実際、上記の半空間における動的境界条件に付随する分数冪拡散方程式は half Laplacian を拡散項とする場合であり、減衰評価の観点からある種の臨界になっていることがわかる。基本解の空間遠方における減衰評価は、解の重み付き空間の可積分性と密接な関係があり、高次漸近展開理論の構築には基本解からの影響の抽出は必要不可欠である。ここでは一般の熱核を有する非線形積分方程式について、解の時間大域可解性の十分条件の考察と、基本解の減衰とモーメントの関係を考察する。またそれらの成果を元に解の高次漸近展開の構築を目指す。

4. 研究成果

上記の研究目的に基づき、非線形拡散方程式の解の高次漸近展開理論の構築を行うとともに、それに付随した問題に対して以下の研究成果を得た。

(1) 全空間における非線形拡散方程式の一般化：ここでは非線形性の一般化について石毛和弘氏（東北大学）と共に共同研究を行ない、これまでの先行研究では扱うことができなかった非線形項に解の微分が含まれている場合について解が基本解に収束するための非線形性の条件を元に具体的な高次漸近展開の構成法を確立した。ここで得られた結果は、これまで Keller-Segel 系や移流拡散方程式に対して得られている高次漸近展開の結果を完全に包括するものである。また本研究成果の応用として3次元以下の全空間における非線形消散項付き波動方程式の高次漸近展開理論を上田好寛氏（神戸大学）、竹田寛志氏（福岡工業大学）とのそれぞれの共同研究によって確立した。

(2) 非線形積分方程式の大域可解性と高次漸近展開: 拡散方程式に対応する積分方程式の積分核である熱核について、自己相似性、半群性、正則性、さらに空間減衰に着目し一般化した積分核を有する非線形積分方程式について石毛氏、小林加奈子氏(東北大学)と共に研究した。これは全空間における非線形拡散方程式の解の大域挙動の拡散項に対する一般化である。ここではまず、解の大域可解性に関する非線形性並びに初期値に対する十分条件を得ると共に、解の第一漸近形が積分核の定数倍になることを示した。さらに初期値が含まれる重み付き空間の次数と高次漸近展開の展開次数の関係、またその差の減衰評価を線形部分及び非線形部分それぞれについて与えた。ここで扱った積分核の具体例としては分数冪拡散方程式や多重ラプラシアンを拡散項とする高次放物型方程式が挙げられる。一方でこの研究では分数冪拡散方程式を考察する場合、分数の次数に応じてモーメントの次数に制限がつけられていたが、石毛氏と道久寛載氏との共同研究により、その制限を外すことにも成功している。

(3) 半空間における非線形境界条件付き熱方程式の高次漸近展開: 冪乗型の非線形性を含む一般の非線形境界条件を有する場合について考察し、境界に非線形性があることを考慮した新しい関数を構成することにより、解の高次漸近展開を確立した。ここでは領域内部における高次漸近形への収束だけでなく、これまで扱われていない境界上における収束も示しており、今後、爆発問題等への応用が期待できる。

(4) 動的境界条件付き半線形楕円型方程式の大域挙動: 冪乗型の非線形性を有する場合について石毛氏、マレク・フィラ氏(コメニウス大学)と共同研究を行なった。まず2次元以上の半空間において、時間大域可解性を分ける非線形性の指数を導出した。また、ここで得られた小さな時間大域解についてはその第一漸近形がポアソン核になることも示した。さらに有臨界の場合、可解性に対する初期値の空間遠方における減衰評価の必要十分条件を解の各点評価をすることにより与えた。この手法を元に、半空間において境界値が原点で特異性を有する半線形楕円型方程式の解を構成した。また、冪乗型を含むより一般の非線形性を有する問題に対して、時間局所可解性、時間大域可解性、対応する定常問題の可解性が同値であることを示した。これは楕円型方程式の可解性に対して、放物型問題の手法を用いてアプローチするというこれまでにない方法を提示しており、今後の進展が期待される。

(5) その他の研究: 上記の研究から派生し

た研究として、坂口茂氏(東北大学)と共同で相似な等温面を持つ熱方程式の過剰決定問題について、杉山由恵氏(九州大学)と共同で Keller-Segel 系の解の一意性について、石毛氏、ミコライ・セルゼガ氏(ワルシャワ大学)と共同で半線形拡散方程式系の可解性について、岩淵司氏(大阪市立大学)と共同で臨界の粘性項を有するハミルトン・ヤコビ方程式の積分方程式の可解性と漸近挙動について、またジュリア・フリオリ氏(ベルガモ大学)、ベルナルド・ルフ氏(ミラノ大学)、エリデ・テラネオ氏(ミラノ大学)と共同で指数型の非線形項を有する非線形拡散方程式の漸近挙動についてそれぞれ研究を行い、一定以上の成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 18 件)

1. Tsukasa Iwabuchi and Tatsuki Kawakami, Existence of mild solutions for a Hamilton-Jacobi equation with critical fractional viscosity in the Besov spaces, *J. Math. Pures Appl.* (9), 査読有、107巻、2017年、464-489.
2. Giulia Furioli, Tatsuki Kawakami, Bernhard Ruf and Elide Terraneo, Asymptotic behavior and decay estimates of the solutions for a nonlinear parabolic equation with exponential nonlinearity, *J. Differential Equations*, 査読有、262巻、2017年、145-180.
3. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *J. Math. Pures Appl.* (9), 査読有、105巻、2016年、788-809.
4. Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami and Mikolaj Serzega, Supersolutions for a class of nonlinear parabolic systems, *J. Differential Equations*, 査読有、260巻、2016年、6084-6107.
5. Tatsuki Kawakami and Yoshie Sugiyama, Uniqueness theorem on weak solutions to the Keller-Segel system of degenerate and singular types, *J. Differential Equations*, 査読有、260巻、2016年、4683-4716.

6. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Positive solutions of a semilinear elliptic equation with singular Dirichlet boundary data, J. Elliptic Parabol. Equ., 査読有、1 巻、2015年、331-357.
 7. Tatsuki Kawakami and Sigeru Sakaguchi, When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?, Ann. Mat. Pura Appl., 査読有、194巻、2015年、1595-1605.
 8. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Calc. Var. Partial Differential Equations, 査読有、54巻、2015年、2059-2078.
 9. Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami and Kanoko Kobayashi, Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel, J. Evol. Equ., 査読有、14巻、2014年、749-777.
 10. Yoshitugu Kabeya, Tatsuki Kawakami, Atsushi Kosaka and Hirokazu Ninomiya, Eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a large spherical cap under the Robin problem, Kodai Math. J., 査読有、37巻、2014年、620-645.
 11. Tatsuki Kawakami, Higher order asymptotic expansion for the heat equation with a nonlinear boundary condition, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有、57巻、2014年、57-89.
 12. Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami and Kanako Kobayashi, Global solutions for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S., 査読有、7巻、2014年、767-783.
 13. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Large-time behavior of small solutions of a two-dimensional semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Asymptot. Anal., 査読有、85巻、2013年、107-123.
 14. Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations, J. Anal. Math., 査読有、121巻、2013年、317-351.
 15. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Adv. Differential Equations, 査読有、18巻、2013年、69-100.
 16. Tatsuki Kawakami and Yoshihiro Ueda, Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation, Differential Integral Equations, 査読有、26巻、2013年、781-814.
 17. Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Refined asymptotic profiles a semilinear heat equation, Math. Ann., 査読有、353巻、2012年、161-192.
 18. Marek Fila, Kazuhiro Ishige and Tatsuki Kawakami, Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition, Comm. Pure Appl. Anal., 査読有、11巻、2012年、1285-1301.
- [学会発表](計 47 件)
1. 川上竜樹, Asymptotic behavior and decay estimates of the solutions for a nonlinear parabolic equation with exponential nonlinearity, International Workshop on Nonlinear PDEs 2016 in Osaka, 2016年12月8日、大阪府立大学.
 2. 川上竜樹, A semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, 7th Euro-Japanese workshop on Blow-up, 2016年9月7日、ベドレヴォ.
 3. 川上竜樹, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, 9th European conference on elliptic and parabolic problems, 2016年5月23日、ガエタ.
 4. 川上竜樹, Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Seminari d'edps i aplicacions, 2016年2月25日、バルセロナ.

5. 川上竜樹、Existence of mild solutions for the Hamilton-Jacobi equation with critical fractional viscosity in the Besov spaces、Seminaro di Calcolo delle Variazioni & Equazioni alle Derivate Parziali、2016年2月5日、フィレンツェ。
 6. 川上竜樹、When does the heat equation have a solution with a sequence of similar level sets?、Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's、4th Italian-Japanese workshop、2015年5月26日、パリヌ口。
 7. 川上竜樹、Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel、第10回非線形の諸問題、2014年9月19日、大分県中小企業会館。
 8. 川上竜樹、Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、10th AIMS International Conference on Dyn. Systems、Diff. Equations and Applications、2014年7月10日、マドリッド。
 9. 川上竜樹、Existence of positive solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、8th European conference on elliptic and parabolic problems、2014年5月27日、ガエタ。
 10. 川上竜樹、Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、3rd Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's、2013年9月4日、東京工業大学。
 11. 川上竜樹、Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、Equadiff13、2013年8月26日、プラハ。
 12. 川上竜樹、Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations、ERC-NUMERIWAVES Seminar、2013年3月18日、バスク。
 13. 川上竜樹、Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition、Fukae workshop on PDE(2013)、2013年1月24日、神戸大学。
 14. 川上竜樹、Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition、Second Sino-Chilean Conference on Nonlinear Partial Differential Equations and Nonlinear Analysis、2012年6月19日、サンチアゴ。
 15. 川上竜樹、Higher order asymptotic expansion for the heat equation with a nonlinear boundary condition、第4回南大阪応用数学セミナー、2012年4月28日、大阪市立大学。
6. 研究組織
- (1)研究代表者
- 川上 竜樹 (KAWAKAMI TATSUKI)
- 大阪府立大学・大学院工学研究科・准教授
- 研究者番号：20546147