

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2016

課題番号：24740109

研究課題名(和文)有限空間上のC\*環の分類理論

研究課題名(英文)Classification theory of C\*-algebras over finite spaces

研究代表者

勝良 健史 (KATSURA, Takeshi)

慶應義塾大学・理工学部(矢上)・准教授

研究者番号：50513298

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、当初の計画通り有限空間上のC\*環に対する様々な結果を得ただけではなく、研究開始当初では想像もしていなかったC\*環の分類理論に関する幅広い結果を得ることに成功した。有限空間上のC\*環に対する結果として、Cuntz-Krieger環のK理論的不変量に関する結果と、その応用としての「グラフ環の特徴づけ予想」の部分的解決や、単純でないグラフ環に対するK理論的不変量の実現問題の完全解決と、単純でないグラフ環としてどのAF環が現れるかの決定に関する結果を得た。C\*環の分類理論に関する幅広い結果として、可分でないC\*環の分類理論に関する結果や離散群から作られるC\*環に関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we got not only various results on C\*-algebras over finite spaces as expected, but also wide results on classification theory of C\*-algebras. The results on C\*-algebras over finite spaces include the one on K-theoretical invariants of Cuntz-Krieger algebras with the application to the conjecture of characterization of graph algebras, the complete solution to realization problem of K-theoretical invariants of non-simple graph algebras, and the result of determining which AF-algebras arise as non-simple graph algebras. The results on classification theory of C\*-algebras include the ones on non-separable C\*-algebras and on C\*-algebras associated with discrete groups.

研究分野：作用素環

キーワード：数学 関数解析 作用素環 分類

## 1. 研究開始当初の背景

C\*環とは作用素環と呼ばれているものの一種であり、量子力学や位相力学系をはじめとする多くの物理的、数学的对象から自然と表れる。このように、多くの異なった対象から異なった手段で表れた C\*環がいつ同じになるかということをも問う分類理論は、作用素環論において常に中心的な問題の一つである。作用素環には C\*環の他に von Neumann 環があり、分類理論という視点では von Neumann 環論の方が C\*環論に比べて発展している。von Neumann 環の分類で鍵となる事実は、因子環と呼ばれる von Neumann 環を理解すれば一般の von Neumann 環は直積分分解により理解できるという事実である。C\*環論で因子環に対応するのは単純 C\*環である。単純 C\*環の分類理論はここ 30 年で大きく発展した。ところが、von Neumann 環論とは異なり C\*環論では単純 C\*環の分類が発展しても、それを単純でない C\*環の分類に応用しようとしたとき、K 理論的、ホモロジー代数的、位相的困難に起因する新たな問題が多く起きる。

単純 C\*環の分類理論の発展において、「良い性質を満たす C\*環は K 理論的不変量で分類可能である」というスローガンが重要であった。単純 C\*環に対して分類が完了している多くのクラス (TAF 環、純無限 C\*環など) では、K 理論的不変量は単に  $K_0$  群 (順序群として) と  $K_1$  群の組であった。これらの単純 C\*環のクラスに対してはどのような不変量が表れるかを決定する実現問題も解決している。

単純でない C\*環に対しては、この組だけでは不十分である。最も自然な K 理論的不変量の候補は、イデアル、商などの K 群及びそれらの間の自然な写像全てを集めた対象である。この対象は K-web と呼ばれている。ある限られた状況では、この K-web が完全不変量となっていることが知られている一方、少し複雑な状況では完全不変量ではないということも知られているという状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究が目指す究極的な目標は、「単純とは限らない C\*環の分類理論」を完成させることである。上記のような研究開始当初の背景を受け、まずは、単純とは限らない C\*環のクラスに条件を課して限定することにより、K 理論的、ホモロジー代数的、位相的困難に起因する数々の困難に一つ一つ取組み乗り越えていくことで、究極的な目標に向かっていく。また、K-web に代わる完全不変量となる K 理論的不変量の探索や、それらの不変量に対する実現問題の解決も本研究の目的の一つである。

本研究で、主な対象とする単純とは限らない C\*環のクラスは、有限空間上の C\*環とよばれるクラスである。これらの C\*環に対して、いくつかの条件下で分類理論を押し進めることを目標とする。具体的には、各状況下での適切な K 理論的不変量の発見、グラフ環などの具体例を用いた不変量の実現、この不変量を用いた有限空間上の純無限 C\*環の分類などを目的とする。これら本研究の目的は次の 3 つにまとめることができる。

- (1) 良い有限空間  $X$  に対して、 $K$ -web を拡張した  $X$  上の C\*環の不変量を提案し、それが純無限などの良い性質を満たす C\*環のクラスに対して完全不変量となっていることを示す。
- (2) (1) で挙げた  $X$  に対して、実次元 0 などの条件下で (1) で提案した不変量をより簡単な不変量に置き換えることができることを示し、その不変量に対する実現問題を解決する。
- (3) 実次元 0 グラフ環に対して半群を用いた不変量を定義し、これが完全不変量であることを示す。

ここで、(3) に表れたグラフ環とは、いつ実次元 0 になるか、いつ有限空間上の緊密な C\*環になるかが比較的簡単に判断できる C\*環のクラスである。このクラスに関しては  $K$ -web などの K 理論的不変量を具体的に計算する方法があり、 $K$ -web を用いた「グラフ環の特徴づけ予想」と呼ばれる予想があるが、(2) の研究の帰結として、良い有限空間  $X$  に対してこの予想を肯定的に解決することも目的の一つである。

## 3. 研究の方法

まずは、 $K$ -web に関する普遍係数定理が成り立つことが知られているアコーディオン空間に対して、実次元 0 等の条件を課せば  $K$ -web をより扱いやすい不変量に置き換えることができるということを示し、それを用いてグラフ環の特徴づけ予想を肯定的に解決する。その後、より一般の有限空間に対して、 $K$ -web を拡張した不変量の導入、それに関する普遍係数定理の証明、ある条件下での扱いやすい不変量への還元、グラフ環を用いた実現問題の解決を行い、グラフ環の特徴づけ予想を肯定的に解決する。これらの研究と同時進行で、グラフ環に対して半群を用いた不変量を導入し、これが完全不変量であることを証明するという研究も行う。また計画をスムーズに進めるため、この 2 つの研究を研究期間を通して比較し、研究協力者と絶えず連絡を取り合う。得られた成果は雑誌に投稿するだけでなく、国内外の研究集会で発表する。さらに、研究集会の参加者との研究連絡を行い、最新の研究動向についての情報交換などを行う。

#### 4. 研究成果

本研究では、当初の計画通り有限空間上の  $C^*$  環に対する様々な結果を得ただけではなく、研究を開始したときには想像もしていなかった多くの結果を得ることに成功した。得られた成果を以下の3項目に分けて説明する。

##### ・Cuntz-Krieger 環の $K$ 理論に関する結果

Arklint 氏と Bentmann 氏と共同で、グラフ環の特別なものである Cuntz-Krieger 環の  $K$  理論の研究を行った。その結果は、論文 と論文 という2編の論文にまとめ、査読付きの雑誌で出版された。また、アメリカと東京で行われた国際研究集会および大阪で行われた国内の研究集会でこの結果に関する講演を行った(学会発表, , )。論文 では、「研究の目的」内に書かれている(1)と(2)の目的に対し、3種類ほどの有限空間  $X$  のクラスに対してほぼ満足のいく結果を得ることができた。その応用として論文 では「研究の目的」内で説明されている「グラフ環の特徴づけ予想」をある種の有限空間のクラスに対して解くことに成功した。結果を論文として発表した上記の有限空間のクラス以外にも、ある特別な有限空間に対しては、同様の結果が得られることが分かった。しかも同様の手法を適用できる有限空間のクラスの限界に関するある種の予想を立てることができた。さらにこの限界を超えた有限空間の中でも特別なものに対しては、2次コホモロジーのある元を不変量に加えると分類できるかもしれないという着想を得た。

##### ・単純でないグラフ環に関する結果

Eilers 氏, Tomforde 氏, West 氏と共同で、グラフ環の  $K$  理論的不変量としてどのようなものが出てくるかを完全に決定し、査読付きの雑誌で出版した(論文)。グラフ環は有限空間上の  $C^*$  環の興味深い例を数多く提供している重要な  $C^*$  環のクラスである。グラフ環のイデアル構造や  $K$  理論的不変量は、全てグラフの言葉で記述することができ、グラフ環がいつ有限空間上の緊密な  $C^*$  環になるのかということも、グラフの言葉で記述することができる。しかし、どのような  $K$  理論的不変量がグラフ環の  $K$  理論的不変量として得られるかという問題については、部分的な必要条件が知られているだけであった。本研究の研究代表者は Eilers 氏, Tomforde 氏, West 氏と協力し、グラフ環の  $K$  理論的不変量として得られるための必要条件を列挙し、それらが実は十分条件であることを、与えられた  $K$  理論的不変量からグラフを構成することで示した。この構成において、代数的な問題を順序構造を考慮に入れながら解かなくてはいいけないが、本研究の研究代表者はこれまでの関連する研究での経験をもとにその問題を解くことに成功した。この共同論文の結果

は、本研究の大きな目的の1つである「グラフ環と呼ばれる  $C^*$  環のクラスを、 $K$ -web を用いた  $K$  理論的不変量で分類する」ことに繋がる非常に有用な成果である。

また、Eilers 氏, Ruiz 氏, Tomforde 氏と共同で、与えられた  $A F$  環がいつグラフ環になるかという問題に関する研究を行い、満足のいく結果を得ることができた。その成果は、査読付きの雑誌で出版されている(論文)。特に  $A F$  環が小さな有限空間上の顕密な  $C^*$  環であったときは、この結果は完全な解答を与えている。

これらの研究は、デンマークやカナダでの研究交流を通して遂行した。上記2つの結果は、有限空間上のグラフ環の分類をする上で有意義な結果である。

##### ・ $C^*$ 環の分類理論に関する幅広い結果

査読付きの雑誌で出版された残り3本の論文(論文, 論文, 論文)では、研究開始当初では思いつかなかった  $C^*$  環およびその分類に関する結果をそれぞれ得ている。これらの結果は本研究が目指す究極的な目標である「単純とは限らない  $C^*$  環の分類理論の完成」に対して少なからぬ示唆をもたらしてくれるものと思われる。

論文 では、Farah 氏と共同で、可分ではない UHF 環の分類に関する結果を得た。可分である UHF 環の場合は超自然数が完全不変量であることが古くから知られているが、我々の研究で可分ではない UHF 環に対しては超自然数が同じでも同形でないものが多く存在することが分かった。そのような最初の例はグラフから作られたが、その構成方法を工夫することにより、濃度の観点で可能な限り多くの互いに同形でない可分ではない UHF 環の分類を構成することができた。この結果は、よい不変量で分類を行うときに可分であるという性質が非常に重要な役割を果たすことを証明したという点において、非常に意義深い成果であると言える。

論文 は、離散群から作られる  $C^*$  環と群の近似性質との関連についての Otgonbayar 氏との共同研究がまとめられている。離散群からいくつかの自然な  $C^*$  環(や von Neumann 環)を定義することができるが、その中で一様 Roe 環と呼ばれる  $C^*$  環と群 von Neumann 環との共通部分として得られる  $C^*$  環が、 $C^*$  環として最も自然に表れる被約群  $C^*$  環と一致するかどうかという問題があり、Otgonbayar 氏との共同研究では、群の近似性質を用いてこの問題に挑戦した。この問題の完全解決を得ることはできなかったが、2種類の  $C^*$  環が一致するかどうかという問いを係数付きにしたものが、離散群の近似性質の特徴づけとなっていることを証明した。この結果を用いて、未解決だったある一つの疑問に完全な解答を与えた。また、2種類の  $C^*$  環が一致するの

ではないかと思われる状況証拠をいくつか示した。これらの成果をまとめた論文が査読付きの雑誌に掲載されることが決定した。この研究成果だけでなく、それを得る過程で獲得した技術は本研究の目的達成への大きな足掛かりとなる。

論文 では, Ara 氏と Exel 氏と共同で, ある種の力学系に不随する  $C^*$ 環の研究を行った。この研究においては半群が重要な役割を演じ, ここで得られた結果や知見は, 「研究の目的」内に書かれている(3)の目的に対して大いに役に立つと思われる。これら出版した結果の他にも,  $C^*$ 環の分類理論に関する幅広い結果を得て, 国内外での研究集会で発表を行った(学会発表, , )。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計7件)

Soren Eilers, Takeshi Katsura, Mark Tomforde and James West, The Ranges of K-theoretic Invariants for Nonsimple Graph Algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有, 368 (2016), no. 6, 3811-3847.

Ilijas Farah, Takeshi Katsura, Nonseparable UHF algebras II: Classification, Math. Scand., 査読有, 117 (2015), no. 1, 105-125.

Takeshi Katsura, Otgonbayar Uuye, On the invariant uniform Roe algebra, J. Operator Theory, 査読有, 72 (2014), no. 2, 549-556.

Soren Eilers, Takeshi Katsura, Efren Ruiz and Mark Tomforde, Identifying AF-algebras that are graph  $C^*$ -algebras, J. Funct. Anal., 査読有, 266 (2014), no. 6, 3968-3996.

Sara Arklint, Rasmus Bentmann and Takeshi Katsura, The K-theoretical range of Cuntz-Krieger algebras, J. Funct. Anal., 査読有, 266 (2014), no. 8, 5448-5466.

Sara Arklint, Rasmus Bentmann and Takeshi Katsura, Reduction of filtered K-theory and a characterization of Cuntz-Krieger algebras, J. K-Theory, 査読有, 14 (2014), no. 3, 570-613.

Pere Ara, Ruy Exel and Takeshi Katsura, Dynamical systems of type  $(m, n)$  and their  $C^*$ -algebras, Ergodic Theory Dynam. Systems, 査読有, 33 (2013), no. 5, 1291-1325.

〔学会発表〕(計6件)

Takeshi Katsura, On magic square  $C^*$ -algebras, Kyoto Operator Algebra Seminar, 2017年3月8日, 京都大学(京都府・京都市)

Takeshi Katsura, Warped crossed products and their applications, 作用素環論の最近の進展, 2016年9月12日, 数理解析研究所(京都府・京都市)

Takeshi Katsura, Classification of  $C^*$ -algebras with finitely many ideals, Workshop on Operator Algebras, 2013年5月12日, 東京大学(東京都・目黒区)

Takeshi Katsura, Characterization of Cuntz-Krieger algebras, 作用素論・作用素環論研究集会, 2012年11月24日, 大阪教育大学(大阪府・大阪市)

Takeshi Katsura, Problems on non-simple semiprojective  $C^*$ -algebras, Workshop on Semiprojective  $C^*$ -Algebras, 2012年9月4日, コペンハーゲン(デンマーク)

Takeshi Katsura, Classification of purely infinite  $C^*$ -algebras with finitely many ideals, GPOTS 2012, 2012年5月30日, ヒューストン(アメリカ合衆国)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~katsura/papers/index.html>

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

勝良 健史 (KATSURA Takeshi)  
慶應義塾大学, 理工学部, 准教授  
研究者番号: 50513298

(2)研究分担者

無し

(3)連携研究者

無し

(4)研究協力者

無し