

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 9 月 18 日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740110

研究課題名(和文)可積分な離散ハングリー系に付随するアルゴリズムの高速化と理論解析

研究課題名(英文)Acceleration and theoretical analysis of algorithms in terms of discrete integrable systems of hungry type

研究代表者

福田 亜希子(Fukuda, Akiko)

芝浦工業大学・システム理工学部・助教

研究者番号：70609297

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：これまでの研究代表者らの研究において、離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく非対称帯行列に対するdhLVアルゴリズムと離散ハングリー戸田方程式に基づくtotally nonnegative行列に対するdhTodaアルゴリズムをそれぞれ定式化している。本研究では、これらのアルゴリズムに対して、収束の高速化手法を組み込み、丸め誤差解析、大域的収束性、局所的収束性、収束次数等の解析により、多くの理論的性質を明らかにした。さらに、これらのアルゴリズムが対象とする行列に対して、固有ベクトルが効率よく計算できることを示した。

研究成果の概要(英文)：In the previous study, we have designed two algorithms: the dhLV algorithm for computing eigenvalues of nonsymmetric banded matrix based on the discrete hungry Lotka-Volterra (dhLV) system, and the dhToda algorithm for computing eigenvalues of totally nonnegative matrix based on the discrete hungry Toda (dhToda) equation.

In this study, for these algorithms, we incorporate the technique for faster convergence, and clarify rounding errors, global convergence, local convergence and convergence rate. It is also clarified that the eigenvectors can be computed efficiently.

研究分野：応用可積分系

キーワード：離散可積分系 固有値 離散戸田方程式 超離散化 保存量 中心多様体 収束次数 原点シフト

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者はこれまでに、非線形可積分系の理論をもとに、行列の固有値を計算する新しい数値計算アルゴリズムを定式化している。特に、可積分な離散ハングリー戸田(dhToda: discrete hungry Toda) 方程式の数理構造を基に、totally nonnegative (TN) 行列の固有値が計算できる dhToda アルゴリズムを提案しており、既存の数値解法では精度が劣化する問題に対して高精度に固有値を計算できることを数値的に確認している。提案したアルゴリズムに対する大域的な収束性は保証されていたが、局所的な収束性や高精度に固有値が計算できることの理論保証はない。さらに、大規模問題への適用に耐えうる高速性は持ち合わせていなかった。一方、離散ハングリーロトカ・ボルテラ(dhLV: discrete hungry Lotka-Volterra) 系と呼ばれる離散可積分系からは、非対称帯行列の固有値が計算できる dhLV アルゴリズムを定式化している。dhToda アルゴリズムおよび dhLV アルゴリズム共に、固有値の計算機能を備えているのみであり、固有ベクトルについては、逆反復法などの既存の計算手法を用いれば計算可能ではあるが、可積分系特有の数理構造を利用した計算手法は開発されていないのが現状であった。

## 2. 研究の目的

TN 行列に対する固有値計算のための dhToda アルゴリズムおよび、非対称帯行列に対する固有値計算のための dhLV アルゴリズムに対して、収束の高速化や収束性・計算精度に関する理論保証を与えるために、以下の7項目を行う。

- (1) dhToda アルゴリズムに対する丸め誤差解析
- (2) dhToda アルゴリズムの局所収束性解析
- (3) dhToda アルゴリズムに対する高速化のための原点シフト導入
- (4) シフト量の計算方法の開発
- (5) 原点シフトを導入した dhToda アルゴリズムに対する大域的収束性および収束次数の解析
- (6) dhToda 方程式に対する保存量の導出
- (7) dhLV 系の数理構造を利用した固有ベクトルの計算手法の開発

## 3. 研究の方法

- (1) dhToda アルゴリズムに対する丸め誤差解析  
dhToda アルゴリズムは固有値計算のための dqds アルゴリズムのある種の一般化と考えることができる。dqds アルゴリズムに対して行われている丸め誤差解析の手法である混

合型誤差解析を用いて dhToda アルゴリズムの誤差解析を行う。

### (2) dhToda アルゴリズムの局所収束性解析

dhToda アルゴリズムと数学的に等価である可積分な離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に対しては、中心多様体理論と呼ばれる力学系に対する古典的な解析手法によって、その平衡点付近での局所的な収束性が解析されている。dhToda アルゴリズムに対しても同じ手法を用いて、平衡点付近での局所的な収束性の解析を行う。

### (3) dhToda アルゴリズムに対する高速化のための原点シフト導入

dhToda アルゴリズムは、固有値計算のための LR 法と数学的に等価である。LR 法に対する原点シフトは容易に導入可能である。dhToda アルゴリズムに対しても、形式的には LR 法と同様に容易に原点シフトの導入が可能である。しかし、実装を行う際に行列の陽的な乗算や分解などのコストがかかる演算を必要とする。そこで、成分同士の演算のみで原点シフトの作用をもつ効率的なアルゴリズムの導出を試みる。

### (4) シフト量の計算方法の開発

原点シフトにおけるシフト量は、対象とする行列の最小固有値の下界から、できるだけ最小固有値に近い値を選ぶ必要がある。さらに、反復ごとにシフト量を最小固有値により近くなるように改良することが望ましい。本研究では、Newton シフトを取り上げ、TN 行列の Newton シフトを効率よく計算する方法を導出する。

### (5) 原点シフトを導入した dhToda アルゴリズムに対する大域的収束性および収束次数の解析

固有値計算のためのシフト付き LR 法の収束証明の方法に倣い、dhToda アルゴリズムに対する大域的収束性の証明を行う。さらに、シフト量が反復ごとに改良される場合の収束次数の解析も併せて行う。

### (6) dhToda 方程式に対する保存量の導出

dhToda 方程式の保存量自体は既に知られているが、dhToda 方程式と数学的に等価な dhLV 系に対する保存量が非常に簡便な手法により導出されている。この導出方法を dhToda 方程式に適用することで、dhToda 方程式の保存量の簡便な導出を試みる。

### (7) dhLV 系の数理構造を利用した固有ベクトルの計算手法の開発

dhLV アルゴリズムが対象とする行列は非対称な帯行列であり、固有値は複素数となるが、実装上は実質的に実数のみの演算によって複素固有値を求めることができる。固有ベクトル計算についても、dhLV 系の数理解造を利用して、複素数での演算を回避して固有ベクトルを求めるアルゴリズムを導出する。

#### 4. 研究成果

##### (1) dhToda アルゴリズムに対する丸め誤差解析

混合型誤差解析手法を用いた dhToda アルゴリズムに対する丸め誤差解析により、dhToda アルゴリズムは相対誤差の意味で高精度に固有値を計算できることが明らかになった。Koev (2005) が提案している TN 行列の固有値計算アルゴリズムと比較して、dhToda アルゴリズムの方が、固有値が受ける相対的摂動が小さいことが明らかになった。

##### (2) dhToda アルゴリズムの局所収束性解析

dhToda 方程式と数学的に等価である qd 型 dhLV 系に対する中心多様体理論を用いた局所解析により、収束の終盤において指数的な収束性を示すことが理論的に示された。dhToda 方程式に対しても、ある条件の下で同様の収束性を示すことが明らかになった。

##### (3) dhToda アルゴリズムに対する高速化のための原点シフト導入

LR 法における原点シフト導入に倣い、形式的に導入された dhToda アルゴリズムの原点シフトに対して、行列の分解等の陽的な演算を回避し、成分のみの演算で原点シフトの効果を含めることに成功した。数値実験により、原点シフトを導入した方がシフト無しの場合よりも速く収束することを確認している。

##### (4) シフト量の計算方法の開発

TN 行列に対するシフト量について、Newton シフトを改良したシフト戦略を提案している。シフト後の行列に対する Newton シフトを効率よく計算する方法を開発し、既に採用しているシフト量に、新たに計算したシフト量を加えることで、反復毎にシフト量が最小固有値に近づくような実装が可能になった。

##### (5) 原点シフトを導入した dhToda アルゴリズムに対する大域的収束性および収束次数の解析

原点シフトを導入した dhToda アルゴリズムについて、原点シフトを最小固有値未満に選

べば大域的収束性が保証されることが明らかになった。さらに、反復毎にシフト量が改善される改良型 Newton シフトを用いた dhToda アルゴリズムに関する収束次数の解析を行った結果、弱 2 次収束することが明らかになった。

##### (6) dhToda 方程式に対する保存量の導出

dhLV 系に対する簡便な保存量の導出方法を応用して、dhToda 方程式に対しても簡便に全ての独立な保存量を導出できることが明らかになった。

##### (7) dhLV 系の数理解造を利用した固有ベクトルの計算手法の開発

dhLV アルゴリズムが対象とする非対称帯行列について、固有ベクトルの成分には規則性があり、放射状に分布することが明らかになった。この性質を利用することで、実数の固有ベクトルのみを求めた後に偏角に関する情報を付与することで、実質的に実数の演算のみで効率的に複素固有ベクトルを計算できることが明らかになった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- [1] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Error analysis for matrix eigenvalue algorithm based on the discrete hungry Toda equation, Numerical Algorithms, 61 (2012), pp. 243--260.
- [2] 福田 亜希子, 山本 有作, 岩崎 雅史, 石渡 恵美子, 中村 佳正, 離散ハングリー-戸田方程式に基づく Totally Nonnegative 行列に対する固有値計算, 京都大学数理解析研究所講究録, 1791 (2012), pp.1-11.
- [3] You Takahashi, Masashi Iwasaki, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Asymptotic analysis for an extended discrete Lotka-Volterra system related to matrix eigenvalues, Applicable Analysis, 92 (2013), pp. 586--594.
- [4] 福田 亜希子, 岩崎 雅史, 山本 有作, 石渡 恵美子, 中村 佳正, ハングリー型の離散可積分系と非対称行列の固有値計算 可積分アルゴリズムにおける最近の発展, 日本応用数学会論文誌,

23(2013), pp. 109--181.

- [5] 飛田 明彦, 福田 亜希子, 石渡 恵美子, 岩崎 雅史, 中村 佳正, ある拡張型離散戸田方程式の漸近挙動について, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の最前線--構造と現象の多様性」研究集会報告, 24A0-S3 (2013), pp. 150--155.
- [6] 柿崎 苑美, 福田 亜希子, 岩崎 雅史, 山本 有作, 石渡 恵美子, 中村 佳正, 箱に番号がついた新しい箱玉系について, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の拡がり」研究集会報告, 25A0-S2 (2014), pp. 121--126.
- [7] Ryo Sumikura, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura, Eigenvalue computation of totally nonnegative upper Hessenberg matrices based on a variant of the discrete hungry Toda equation, AIP Conference Proceedings, 1648 (2015), 690006.
- [8] Sonomi Kakizaki, Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Conserved quantities of the integrable discrete hungry systems, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S), in press.
- [9] 隅蔵 亮, 福田 亜希子, 石渡 恵美子, 山本 有作, 岩崎 雅史, 中村 佳正, 離散戸田方程式のある拡張に基づく Totally Nonnegative 行列の固有値計算アルゴリズム, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の現状 課題と展望を探る」研究集会報告, 26A0-S2 (2015), pp.115--120.
- [10] 竹内 弘史, 相原 研輔, 福田 亜希子, 石渡 恵美子, 離散ハングリーロトカ・ポルテラ系に基づく非対称帯行列の全固有対の計算, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の現状 課題と展望を探る」研究集会報告, (2015), (掲載決定).

〔学会発表〕(計 22 件)

- [1] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, Accurate eigenvalues of totally nonnegative matrices by means of the discrete hungry Toda equation, 9th

International Workshop on Accurate Solution of Eigenvalue Problems (IWASEP9), Embassy Suites Napa Valley, CA, USA, 5 July 2012.

- [2] Yoshimasa Nakamura, Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, Integrable discrete hungry systems and their related eigenvalue algorithms, International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE 10), Yin Feng Holiday Resort, Xikou, Ningbo, China, 15 July 2012.
- [3] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, A generalization of the dqds algorithm for totally nonnegative matrices, The 8th East Asia SIAM Conference (EASIAM 2012), National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 26 July 2012.
- [4] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, and Yoshimasa Nakamura, An extension of the dqds algorithm for totally nonnegative matrices and the Newton shift, The 18th Conference of the International Linear Algebra Society (ILAS2013), Providence, Rhode Island, USA, 13 June 2013.
- [5] Akiko Fukuda, Conserved quantities of the integrable discrete hungry Lotka-Volterra system, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013 (CJS2013), Meiji University, NAKANNO Campus, Tokyo, JAPAN, 5--8 Sep. 2013.
- [6] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, and Yoshimasa Nakamura, An extension of the qd algorithm for totally nonnegative Hessenberg matrices, International Workshop on Eigenvalue Problems: Algorithms; Software and Applications, in Petascale Computing (EPASA2014), Tsukuba International Congress Center EPOCHAL TSUKUBA, Tsukuba-city, Japan, 9 Mar. 2014.
- [7] Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, and Yoshimasa Nakamura, An Extension of the dqds Algorithm for Totally Nonnegative Matrices and Its Convergence Rate, East Asia Section of

SIAM (EASIAM) 2014, Ambassador City  
Jomtien, Pattaya, Chonburi, Thailand,  
23--25 June 2014.

- [8] Akiko Fukuda, Sonomi, Kakizaki,  
Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki,  
Emiko Ishiwata, and Yoshimasa  
Nakamura, An extension of the box and  
ball system in terms of the discrete  
hungry integrable system, 2nd  
Slovak-Japan Conference on Applied  
Mathematics 2014, Radzovce - Obrucna,  
Cerova vrchovina, Slovakia, 14--18  
Sep. 2014.

〔その他〕

ホームページ：

<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~afukuda/>

6．研究組織

(1)研究代表者

福田 亜希子 (AKIKO FUKUDA)

芝浦工業大学・システム理工学部・助教

研究者番号：70609297

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし