

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：32502

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24830017

研究課題名(和文) 証明の学習指導における議論の活動を捉える枠組みの構築

研究課題名(英文) Developing a framework to analyse students' argumentative activities in the learning and teaching of proving

研究代表者

辻山 洋介 (TSUJIYAMA, YOSUKE)

敬愛大学・国際学部・講師

研究者番号：10637440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、学校数学における証明の学習状況を改善するために、証明の構想と構成の両者に焦点を当てた学習指導の方策を解明することを目指す。その中でも、両者の活動における推論の不確実性に着目し、証明の学習指導における議論の活動を捉える枠組みを構築することを研究目的とした。数学教育学と科学哲学の文献解釈と、中学校第二学年を対象とした調査とその分析を通じて、枠組みを実践的・理論的に検討し、学習指導への示唆を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：Proof and proving should be central to students' school mathematical experience. However, innumerable students have difficulties in producing a proof. The overall purpose of this study is to improve the learning and teaching for breaking through this situation. In particular, this study focuses on plausibility and probability of proving processes and aims at developing a framework to analyse students' argumentative activities in the learning and teaching of proving. By examining existing studies, conducting a teaching experiment and analysing its results, this study develops a framework and derives implications for teaching.

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：証明 数学教育 議論 argumentation 証明の構想 証明活動 proving 科学教育

### 1. 研究開始当初の背景

証明は、数学的な事柄が真である根拠を示すとともに、日常生活において合理的に物事を判断したり、他者を説得したりするために重要な役割を果たす。そのため、証明の学習指導の重要性は国内外を問わず広く認められている。しかし、多くの生徒は証明の生成に困難を抱えている。この状況を、証明の構想と構成に取り組む方法に着目して改善することが、実践上及び研究上の重要な課題とされている。

この課題の解決を目指して、本研究は以下のアプローチをとった。第一に、「議論(argumentation)」に着目することである。議論は、論理や形式を中心とした従来の研究とは対照的に、生徒が不確実な論を立てたり、その論を評価し不確実さを解消したりする行為に焦点を当てるために、証明研究に導入された。議論への着目は、生徒の思考や主体的な活動を中心に据えた学習指導論と整合的であり、かつ、数学者の研究活動から見ても本質的である。それゆえ、生徒の不確実な発想をいかした創造的な証明の学習指導の実現につながることを期待される。

第二は、議論に着目した先行研究では生徒の実際の活動を記述することに重点が置かれてきたことに対して、本研究は、議論がもつ特性を視点として、学習指導において実現すべき活動を分析することである。証明の構想と構成に取り組む方法を育成する方策を解明するためには、学習指導において実現すべき両者の活動の特質が明らかでなければならない。なぜなら、その特質から活動の進展において重要な取り組みが具体化され、その取り組みに焦点を当てた指導が可能になるからである。この点において、記述的な分析に重点が置かれてきた従来の研究を発展させる必要がある。

以上から、議論の特性を視点として証明の構想と構成を理論的及び実践的に分析し、学習指導において実現すべき両者の活動を捉える枠組みを構築することにした。

### 2. 研究の目的

本研究は、学校数学における証明の学習状況を改善するために、証明の構想と構成の両者に焦点を当てた学習指導の方策を解明することを目指す。その中でも、両者の活動における推論の不確実性に着目し、証明の学習指導における議論の活動を捉える枠組みを構築することを研究目的とした。

### 3. 研究の方法

前述の研究目的を達成するために、本研究は次の課題を設定し、研究を遂行した。

- (1) 証明の学習指導における議論の活動を捉えるための枠組みを理論的に立案すること。
- (2) 立案した枠組みに基づいて調査を計画し実施すること。

- (3) 調査の分析に基づいて、議論を捉える枠組みを構築すること。

まず(1)について、数学教育学と科学哲学の関連文献を精読し、概念分析によって、議論の特性に基づいて証明の構想と証明の構成を特徴付けた。次に(2)について、中学校教師の協力を得て、特徴付けられた活動を顕在化し促進するための調査を計画し実施した。そして(3)について、調査の分析に基づいて特徴付けを再検討し、一連の理論的考察と実践的考察を総合しながら、議論の活動を捉える枠組みを構築した。

### 4. 研究成果

#### (1) 議論の特性に基づく特徴付け

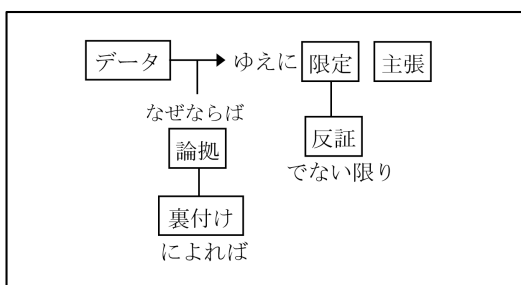
本研究は、証明の構想と証明の構成において不確実な考えや判断を用いる活動に着目する。すなわち、証明の構想において実際に証明に利用できるかどうか不明な予想を立てる活動や、証明の構成においてその予想を取捨選択しながら組織化する活動である。このような活動を学習指導においてどのような形で実現すべきなのかという問いに答えるためには、不確実な考えや判断に着目して概念分析を行う必要がある。そのために、本研究は、人が実際に行う議論の蓋然性に着目した科学哲学者トゥールミンに依拠することにした。

まず、トゥールミンの研究の背景を確認した。具体的には、トゥールミンは論理学に対する形式的なアプローチを批判し、人が実際に用いる論は形式的三段論法とは異なり蓋然的であり、かつ、そのような論に価値があるという立場をとった。形式的三段論法とは、例えば「アンはジャックの姉妹の一人である。ジャックの姉妹はみな、赤い髪をしている。したがって、アンは赤い髪をしている」である。この論法に対して、トゥールミンは、「アンは赤い髪をしている」という主張の正当化として意味をもたないと指摘した。なぜなら、この論を立てるためには、大前提にあたる「ジャックの姉妹はみな、赤い髪をしている」を事前に確かめておかなければならないからである。その際に、既にジャックの姉妹の一人であるアンの髪の色を実際に確かめているはずである。その状況において、「アンが赤い髪をしている」という主張を正当化する必要はないとトゥールミンは捉えたのである。その上で、実際の議論においては、価値ある予想を正当化しようとするのが本質的であるとトゥールミンは考え、蓋然性に着目し、論を立てたり評価したりする実際の行為を分析したのである。

次に、以上の背景を考慮しながら、議論の蓋然性に関するトゥールミンの考察を解釈し、議論の概念規定を行った。具体的には、議論をその目的、方法、状況から捉えた上で、「他者と相互作用しながら、蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること、並びに文脈に即して論を評価することにより、主張を

正当化すること」と規定した。

次に、「論のレイアウト」を中心としてツールミンの研究内容を具体的に解釈することにより、議論がもつ特性を抽出した。「論のレイアウト」は、人が実際に論を立てたり評価したりする際に、「場」に依存せずに考慮する必要のある六つの要素とその関係を図式化したものである(図1)。さらに、ツールミンは、論を評価する基準が「場」に依存して異なることを指摘した。ツールミンは「論のレイアウト」や場への依存性について、各要素が必要となる状況や、各要素の使い方を例示しながら述べているが、それらの状況や使い方を明示的な特性としてあげているわけではない。そのため、ツールミンの言及した具体的な内容に即して議論の特性を解釈した。その結果、立論と論の評価の仕方に関して「入手可能なデータと論拠の利用」、「蓋然性の明示」、「条件の付加」、「暫定的な論拠とその裏付けの利用」という4つの特性と、論の評価の仕方に関して「タイプに応じた基準の適用」という1つの特性を抽出した。



[図1 「論のレイアウト」]

そして、証明の構想と立論を、証明の構成と論の評価をそれぞれ対応させ、特徴付けた。具体的には、立論の4つの特性に基づいて、証明の構想を「不確実であるかもしれないデータと論拠を用いた立論」、「不確実さを解消できるという想定の下での立論」、「付加した条件の下での立論」、「暫定的な論拠が認められるという前提の下での立論」と特徴付けた。さらに、論の評価の5つの特性に基づいて、証明の構成を「データや論拠の付加による論の組織化」、「データや論拠の棄却とその利用による論の組織化」、「条件付きの論の利用による論の組織化」、「論拠の裏付けの付加による論の組織化」、「タイプの変更による論の検討と組織化」と特徴付けた。

### (2) 調査の計画・実施・分析

次に、上述の理論的考察に基づいて、証明の学習指導における議論の活動を捉える枠組みを暫定的に考案した。それは、(1)の特徴付けの中でも「不確実さを解消できるという想定の下での立論」と「データや論拠の棄却とその利用による論の組織化」に焦点を当て、証明の構想と構成を次のような生徒の活動として捉えるものである。

証明の構想において、予想の不確実さを明示しながら、その不確実さを解消できるという想定の下で論を立てる活動

証明の構成において、予想の不確実さを解消できない状況に直面し、その予想を棄却し、棄却した予想を利用しながら別の予想を行い、論を証明へと組織化する活動

以上の活動に焦点を当てた調査を行うために、中学校教師に協力を得て、調査の対象や形式を検討した。その結果、調査は証明の構想に焦点を当てた中学校第二学年の一斉授業として、通常の単元の一授業として行うことになった。そのため、授業のねらい、課題の設定、授業展開、生徒の反応の予想、指導・支援、単元における位置づけを含め、詳細な検討を行った。特に課題と展開については、理論的考察の修正や追加を含め、慎重に検討を行った。

調査において、証明の構想と証明の構成とに取り組む生徒の活動を捉えることができた。このような活動を顕在化し促進することができたのは、(1)の理論的考察があったことによる。特に「棄却」を考慮したことにより、生徒が方針を柔軟に立て直したり、一度は棄却した方針を証明の構成の後に見直したりする活動を的確に捉えることが可能になった。

### (3) 調査の分析と枠組みの構築

最後に、調査の分析に基づいて暫定枠組みの修正すべき箇所を特定し、枠組みを構築し直した。第一に、調査においては、不確実な論を一旦は立てながらも、それを柔軟に変更しながら証明の構想に取り組む生徒の姿が多く観察された。暫定的な枠組みにおいて「棄却」は主に証明の構成に位置付けられていたが、生徒は証明の構想においても自然に「棄却」にかかわる活動を行っているということが明らかになった。このことから、不確実な論を多様に立てる活動や、その中から利用可能性の高そうな論を取捨選択する活動など、論の評価にかかわる活動を証明の構想に盛り込む必要性が明らかになった。

第二に、証明の構想を学習の内容と捉えた授業を考える上では、証明の構想を単体として捉えるのではなく、証明の構成の結果と比較しながら証明の構想を検討する活動が必要であることが明らかになった。このことは、議論の活動における論の評価を、証明の構成において論を組織化する活動としてだけでなく、論の立て方を意識したり改善したりする活動としても反映させることを意味する。

以上の二つの課題を解決するために、証明活動の大枠に、従来の証明の構想と構成の他に、証明の構想を振り返る活動を取り入れ、議論の活動を捉える枠組みを再構築した。そして、その活動の重要性を理論的に議論し直した。

議論は、不確実であってもなお、自分の考えを論として立て、その論を他者と相互作用

しながら徐々に評価・改善していく活動である。この活動に着目することにより、生徒が実際に行う不確実な考えに接近して、証明の構想と構成を捉えることが可能となった。本研究の成果は、そのような活動に焦点を当てた学習指導を教師が行うために、その活動を顕在化し、顕在化した活動を促進するための指針になり得るものである。

#### (4) 研究の意義と今後の展望

以上の研究成果の意義として、次の三点を指摘することができる。第一は、(1)の特徴付けが、不確実な生徒の考えを立論によって表現するという側面と、表現された不確実な考えを評価することによって証明へと組織化するという側面との双方を考慮している点による。大規模調査の結果から、証明の記述式の問題においては、正答率が低だけでなく無解答率が高いことが指摘されてきた。他方、結果として無解答であった生徒の多くは、何かしらの考えをもっていないながらも、それを記述することをためらっていたことが示唆されている。そのような不確実な考えを論として表現するという活動と、表現された論を証明へと組織化するという活動との双方に焦点を当てることにより、学習状況の改善が期待されると考えられる。(2)における調査の実施により、その可能性を実践的に検討することができた。さらに(3)における調査結果の分析に基づく枠組みの再検討により、さらなる実践的検討につながる示唆を得ることができた。

第二は、(2)の調査が、証明の構想に焦点を当てた授業として行われたことである。先行研究において、証明の構想の意義は理論的に指摘されてきたが、実践的な考察は課題として残されてきた。すなわち、議論に着目した研究に限らず、証明の構想という活動自体に焦点を当てた授業の考察は、これまでなされてこなかった。不確実な論を立てて評価するという議論に着目した理論的考察を(1)で行ったことにより、その実践が(2)として可能となった。このことは、議論に着目したからこそ得られた成果であると考えられる。

第三は、研究上の意義である。トゥールミンの議論研究に依拠した従来の研究では、生徒が実際に行った活動を記述することに重点が置かれてきた。対照的に、(1)ではトゥールミンに依拠して議論の規範的な特性を抽出することにより、学習指導において実現すべき証明の構想や構成の特徴付けを行った。そして、それを(2)や(3)のように実践的な検討へとつなげていった。このように、数学教育学研究におけるトゥールミンの援用可能性を広げた点に、本論文の独創性を指摘することができる。

今後の展望として、次のことが考えられる。第一に、(3)で構築し直した枠組みに基づいて調査を行い、さらなる実践的な検討を加

えていくことである。その際には、本研究の(2)で行ったような単発の授業ではなく、複数の授業系列を通じて学習を進められるようにする必要があると考えられる。

第二に、(3)の分析から明らかとなった証明の構想を振り返る活動を、より詳細に分析することがあげられる。証明の構想の立て方を学習内容と捉えるならば、証明の構想に取り組む活動自体とは別に、その取り組みを意識化し、取り組み方を評価・改善する活動や、その取り組みにおいて得た不確実さや疑問に基づいて探究し、証明の構想のよさを実感する活動など、証明の構想を振り返る活動が必要となる。このような活動を意図的かつ計画的に取り入れるためには、その活動を学習過程に位置付けておかなければならない。そこで、証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程を考察する必要があると考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

- 1 Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A., "Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, in press, 査読有. (掲載確定, Online First 版は 2014 年 4 月公開済, DOI: 10.1080/0020739X.2014.902135)
- 2 Komatsu, K., Tsujiyama, Y., Sakamaki, A., & Koike, N., "Proof problems with diagrams: An opportunity for experiencing proofs and refutations". *For the Learning of Mathematics*, 34(1), pp.36-42, 2014 年 3 月, 査読有.
- 3 Komatsu, K., & Tsujiyama, Y., "Principles of task design to foster proofs and refutations in mathematical learning: Proof problem with diagram". In C. Margolinas (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22: Task design in mathematics education*, pp.473-481, 2013 年 7 月, 査読有.
- 4 辻山洋介, 「学校数学の証明の構成における蓋然的な論の検討の方法: argumentation を視点として」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 第 36 巻第 4 号, pp.340-355, 2012 年, 査読有.

[学会発表](計3件)

- 1 辻山洋介・油井幸樹, 「中学校図形領域における課題探究として証明することの授業化: 第二学年の内容『平行四辺形の性質』」. 日本数学教育学会 第 2 回春期研究大会, 創成型課題研究の部, 東

京学芸大学(東京), 2014年6月29日,  
発表確定, 発表審査有.

- 2 小松孝太郎・辻山洋介・坂巻主太・小池徳男, 「学校数学における図が付された証明問題の可能性: ラカトシュの演繹的推量に焦点を当てて」. 日本科学教育学会 第37回年会, 分科会2G1-B1, 三重大学(三重), 2013年9月7日, 発表審査無.(論文集 pp.256-257 に掲載)
- 3 宮崎樹夫・佐々祐之・辻山洋介, 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 中学校第2学年数学科の領域『数と式』及び『図形』における学習の構想」. 日本数学教育学会 第1回春期研究大会, 創成型課題研究の部A, 筑波大学(東京), 2013年6月30日, 発表審査有.(論文集 pp.17-24 に掲載)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

辻山 洋介 (TSUJIYAMA YOSUKE)

敬愛大学・国際学部・専任講師

研究者番号: 10637440