

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 12 日現在

機関番号：32675

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24830087

研究課題名(和文)ジャンプや確率ボラティリティを考慮したデリバティブ価格理論に関する研究

研究課題名(英文)On a derivative pricing theory with jumps and stochastic volatilities

研究代表者

山崎 輝(YAMAZAKI, Akira)

法政大学・経営学部・准教授

研究者番号：60633592

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円、(間接経費) 450,000円

研究成果の概要(和文)：第1の研究として、金融商品のデフォルトや期限前償還などのリスクを比例ハザード型の確率モデルで表現し、これら金融商品の現在価値を近似的に評価する手法を開発した。第2の研究として、金融資産の価格変動のジャンプや確率ボラティリティが表現可能な時間変更型レヴィ過程の下でグラム=シャリエ展開を応用することにより算出平均オプションの近似価格公式を導出した。第3の研究として、時間変更型レヴィ過程の異時点間同時分布に関する特性関数の一般表現を導出し、そのモデル下での離散観測型の幾何平均オプション、ルックバック・オプション、バリア・オプションなどのエキゾティック・オプションの統一的な解析評価手法を開発した。

研究成果の概要(英文)：Firstly, adopting the proportional hazard model, which has been recognized to be statistically meaningful for analyzing and estimating financial event risks such as default risk and prepayment risk, we provided an analytical treatment for the valuation problems. Secondly, we developed an approximate formula based on the Gram-Charlier expansion for pricing average options when the underlying asset price is driven by time-changed Levy processes. The time-changed Levy processes are attractive to use for a driving factor of underlying prices because the processes provide a flexible framework for generating jumps, capturing stochastic volatility as the random time change, and introducing the leverage effect. Thirdly, we proposed a pricing method for discretely monitored path-dependent options under the time-changed Levy processes. The key to the method is to derive a general formula for the multivariate characteristic functions of the intertemporal joint distribution of the processes.

研究分野：ファイナンス

科研費の分科・細目：財政学・金融論

キーワード：デリバティブ 確率ボラティリティ ジャンプ 確率的時間変更

1. 研究開始当初の背景

現在の金融市場はデリバティブ取引の飛躍的な成長に伴い、株式、為替、金利などのオプションやクレジット・デフォルト・スワップ (credit default swap: 以下、CDS) の流動性が拡大すると共に、これら市場間の関連性が以前にも増して高まった。こうしたなか、学術と実務の双方で、伝統的なファイナンス理論が所与とする簡潔で単純化された前提条件を拡張し、実際の金融市場で観測される多様な資産価格の変動や複雑な依存関係を適切に表現できる新しい枠組みが求められている。特に、2008年のリーマンショック以降、現実の金融市場の動きを捨象し、単純化された金融モデルの乱用が金融危機の原因のひとつであるとの指摘が多々あり、その反省からデリバティブ理論を根本から見直そうとする動きが広がっている。

金融商品の現在価値評価では、確率過程の汎関数である割引ペイオフの期待値を計算することになるが、確率過程やペイオフの関数形が複雑な場合には価格評価のための閉じた解が得られないことが多い。こうしたとき、モンテカルロ法や有限差分法、有限要素法といった数値計算方法が用いられるが、これらの数値解法には幾つかの問題が存在する。有限差分法などの偏微分方程式の差分近似で扱える確率過程の次元は高々2次元であり、差分間隔の取り方によっては解が振動するといった欠点を持つ。さらにこの手法を非連続な確率過程に適用することは一般的には難しく、有限差分法の具体的なアルゴリズムが知られているのは一部のレヴィ過程だけである(例えば、Hirsa & Madan [2004], Cariboni & Schoutens [2007])。一方、モンテカルロ法は多次元の確率過程を扱えるが、計算負荷が重く、数値解が乱数の系列に依存する。また、ブラウン運動の汎関数に対するパスの効率的な生成方法や分散減少法は多数知られているものの、レヴィ過程や時間変更レヴィ過程といった非連続な確率過程に関するモンテカルロ法の高速度化技術は未だ発展途上にあるといえる。

2. 研究の目的

本研究では、現在の金融市場の実状に沿ったモデリングや価格評価方法を幾つか提案することで、新しい金融理論の一端を開拓することは勿論のこと、金融実務の一助として金融市場の更なる進歩と発展に貢献することを目的としている。特に本研究では、金融市場の実際の価格変動を記述できる新しい理論モデルを提案すると共に、こうした新しい理論モデルの下で、金融商品価格や金融リスクを数値的に計算するための近似解析手法の開発が目的である。

より具体的には、金融資産価格の変動モデルとして、古典的な連続過程のみならず、非連続過程であるレヴィ過程や時間変更レヴィ

過程といった非常に広いクラスの確率過程を採用し、価格評価の一般論を展開した上で、その近似評価公式を導出し、プレーンバニラ型のデリバティブは勿論のこと、エキゾティック・デリバティブの価格評価問題に対しても近似解析的な数値計算方法を提案することが目的である。

レヴィ過程と時間変更レヴィ過程に関しては、ファイナンスの数値問題に応用できる近似解析手法は未だ希少であり、計算ファイナンスの分野で新規性が高い。特に時間変更レヴィ過程は、従来の確率ボラティリティ・モデルやレヴィ過程を含む非常に広い確率過程のクラスであり、株式や為替などの価格変動の記述に適していることが先行研究で実証されているが、ヨーロッパ・オプションの価格評価はよく知られているものの、エキゾティック・デリバティブの価格評価問題を扱った研究が存在しないため、本研究は時間変更レヴィ過程の下でのエキゾティック・デリバティブの先駆的な研究として位置付けることができよう。

また、金融実務では、解析手法が知られていない金融商品の価格評価に対しては、大掛かりな計算機環境を用意し、かなりの計算コストを掛けてモンテカルロ・シミュレーションで価格を算出しているのが現状である。したがって、近似解析的な数値計算手法の開発によって、実務界での大幅なコスト削減に繋がることを期待される。

3. 研究の方法

本研究の方法は、金融取引や金融資産価格の変動を数理モデルで表現し、その数理モデルを数学的に解析していく「理論研究」と、理論研究で得られた定理・命題・公式をコンピュータ上で再現し、数値実験を実施する「計算研究」の2つから構成される。

研究前半の理論研究では、論文や専門書による先行研究の調査及び新しい金融資産価格モデルを提案するための理論研究を行い、新しい金融資産価格モデルの下で金融商品やデリバティブの価格公式を導出し、数値計算のための近似解析手法を開発した。研究後半の計算研究では、コンピュータ上で金融商品やデリバティブの価格公式をプログラミングし、その価格の妥当性や近似精度の検証を行った。

なお、本研究は研究代表者個人による単身の研究である。

4. 研究成果

次の3つが研究成果となる。

- (1) 比例ハザード型確率モデルを伴う金融商品の経済価値評価について

比例ハザード型のモデルは企業のデフォルト(債務不履行)や住宅ローンの期限前償還などのリスクを統計的に分析するのに適

したモデルであることが以前から知られている。本研究では、比例ハザード型の確率モデルを導入してこれらリスクを内包した金融商品の経済価値を評価する新しい近似手法を開発した。

より具体的には、確率ボラティリティやレヴィ過程（ジャンプ）を説明変数とする設定条件の下で、キュムラント展開を利用した近似評価手法を開発すると共に、近似手法の理論的妥当性についての研究を行った。この手法の応用例としては、例えば、これまでは計算負荷が重かった住宅ローン債権担保証券（Residential Mortgage Backed Security）の価格が高速かつ高精度で計算出来るようになる。

数値実験では、比例ハザード型確率モデルの説明変数に、CIR過程とバリエーション・ガンマ過程を適用し、低次から高次の近似次数で近似誤差を計測した。モデル・パラメータの設定によって低次の近似でも十分な精度がえられることがわかり、高次の近似では満期の長い金融商品であってもほとんどのパラメータ・セットで実務上問題のない精度が得られることがわかった。

研究成果は論文誌 *International Journal of Theoretical and Applied Finance* に掲載された。

(2) 時間変更型レヴィ過程の下での算術平均オプションの近似的な価格評価について

時間変更型レヴィ過程は、金融資産の価格変動のジャンプや確率ボラティリティを表現することが可能であり、さらには原資産価格とボラティリティの相関関係、すなわち、レバレッジ効果も表現できる表現力が豊かな確率過程である。時間変更型レヴィ過程による資産価格モデルは古典的な確率ボラティリティ・モデルや幾何レヴィモデルを含む、非常に一般的な資産価格モデルのクラスである。このモデルの下でグラム・シャリエ展開を基礎とする算術平均オプションの近似評価手法を開発した。評価手法のポイントは、時間変更型レヴィ過程の異時点間の同時指数モーメントの計算およびそのモーメントの存在性に関するある関数の定義域の特定であり、金融実務での実用可能性を数値実験で確かめた一方で、可積分条件に関する一定の制約があることが理論的に示された。

数値実験では、古典的なブラック＝ショールズ・モデルやヘストン・モデル、幾何レヴィモデルに加えて、VG-CIRモデルとNIG-CIRモデルという真（proper）の時間変更型レヴィ過程を適用した。離散観測型の算術平均オプションの計算負荷が高いことが明らかになった一方で、近似精度は実務上十分と思われる水準であった。

さらに、数値実験では Forde & Jacquier [2010] が提案した確率ボラティリティ・モデルの下での算術平均オプションの近似手法との比較分析を実施し、本研究の手法の近似

精度が相対的に優れていることを確認した。

研究成果は論文誌 *Review of Derivatives Research* に掲載された。

(3) 時間変更型レヴィ過程の下での離散観測型経路依存オプションの価格評価について

時間変更型レヴィ過程の異時点間同時分布の多変量特性関数の一般式を導出するとともに、時間変更過程がアフライン過程と二次ガウス過程に従っているときのこの多変量特性関数の閉じた解を与えた。一般式は、条件付き期待値に関する後ろ向き漸化式として与えられるが、漸化式の1ステップごとに複素数値の確率測度変換を施すという技巧が必要となる。また、時間変更過程をアフライン過程にとったときの特性関数の閉じた解は、複素数値のリカッチ型連立常微分方程式を後ろ向き漸化式の形で解くことになる。

得られた多変量特性関数の陽的表現を利用して、時間変更型レヴィ過程の下で離散観測型の幾何平均オプション、フォワードスタート・オプション、バリア・オプション、フェイド・イン・オプション、ルックバック・オプションのそれぞれの価格公式を導き、数値実験でこれらオプション価格が高速・高精度に計算できることを確かめた。オプション価格公式はすべて多変量特性関数の逆フーリエ変換として与えられる。

また、バリア・オプションとルックバック・オプションについては、観測時点の数に対応した高次元フーリエ変換が必要であり、この点は未解決の課題となった。さらには、多変量特性関数は複素数値の多価関数を含むため、数値計算上の問題としてブランチ・カットの難題（分枝問題）が内在している。この問題についてはモンテカルロ・シミュレーションによる妥当性検証によって一定の環境では問題ないことがわかった。ただし、ヘストン・モデルなどでは、プレーン・バニラ・オプションの価格評価でさえ、満期が超長期になるとこの問題が顕在化することが知られており、したがって本研究でも本質的な解決策を示せたわけではない。

研究成果は論文タイトル「Pricing Path-Dependent Options with Discrete Monitoring under Time-Changed Levy Processes」として纏め、2012年11月に国内シンポジウムで発表するとともに、国際論文誌に投稿中である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 2件)

A. Yamazaki, "Pricing Average Options under Time-Changed Levy Processes," *Review of Derivatives Research*, Vol.17,

No.1, pp.79-111, 2014, DOI:
10.1007/s11147-013-9091-7, 査読有

A. Yamazaki, “On Valuation with
Stochastic Proportional Hazard Models
in Finance,” *International Journal of
Theoretical and Applied Finance*,
Vol.16, No.3, pp.1-34, 2013, DOI:
10.1142/S0219024913500179, 査読有

〔学会発表〕(計 1 件)

山 崎 輝, “Pricing Path-Dependent
Options with Discrete Monitoring
under Time-Changed Levy Processes,”
科研費シンポジウム「情報化ネットワ
ーク社会に向けた高度な専門的数理技術ラ
イブラリの研究と開発：セッション1フ
ァイナンスとその応用」, 2012 年 11 月
28 日, 東京工業大学(大岡山)

〔その他〕

ホームページ等

<http://akira2yamazaki.com/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

山崎 輝 (YAMAZAKI, Akira)

法政大学・経営学部・准教授

研究者番号：6 0 6 3 3 5 9 2