

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 13 日現在

機関番号：11301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840002

研究課題名(和文)スケール極限に関わる離散幾何解析とその他分野への応用

研究課題名(英文)Discrete geometric analysis of the scaling limit and its applications

研究代表者

田中 亮吉(Tanaka, Ryokichi)

東北大学・原子分子材料科学高等研究機構・助教

研究者番号：80629759

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,100,000円、(間接経費) 330,000円

研究成果の概要(和文)：主要なテーマである群上のランダムウォークと、統計力学に起源を持つランダムグラフの幾何学について研究を行った。特に、重要な例である3次元可解Lie群とその離散部分群上のランダムウォークについて、無限遠境界上定義される調和測度の振る舞いについて詳細な研究を行い、調和測度がランダムウォークに強く依存し、測度論的性質が著しく変化することを示した。またそこから派生して現れる解析的な問題について研究を行った。さらに局所自由積と呼ばれるランダムグラフのあるクラスについて、重要な幾何学的な量である等周定数の詳細な評価を行った。

研究成果の概要(英文)：We studied the random walks on groups and the geometry of random graphs having their origins in statistical physics. Those are related to the central theme of this project. In particular, we focused on the important example in the three-dimensional solvable Lie groups and its discrete subgroups, and showed that the harmonic measure associated with the random walk drastically changes its measure-theoretic property according to the step distribution. We also studied the related problems arising from this subject.

Furthermore, we estimated the isoperimetric constant which has an important role in the geometry of the graphs for locally free product of random graphs.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：大域解析学 離散幾何解析学 ランダムウォーク 離散群 等周定数

## 1. 研究開始当初の背景

離散幾何解析は、リーマン多様体上の大域解析学の離散類似として有限グラフや無限グラフ上の調和解析、また位相幾何学における単体複体の組み合わせ論的研究、離散凸解析とアルゴリズムなどに関わり研究されてきている。また、生命科学など離散的な性格が強いと考えられる分野との関連が目指されている。本研究と主に関わるのは、有限・無限グラフ上の調和解析、および確率解析と、それらの統計物理や生命科学への応用を探る研究である。特に、離散群上のランダムウォークとその時間・空間無限遠での振る舞いの境界理論による解析、またパーコレーションなどの物理学や生命科学由来のモデルの数学的解析が主な研究対象である。これらの研究で共に重要になると考えられるのが、離散と連続モデルをつなぐスケール極限の議論である。これは連続モデル(例えばリーマン多様体)がその離散類似(例えばその三角形分割)のある主の連続極限によって回復されるような状況や、統計力学における格子モデルのようにミクロにおける離散確率モデルからマクロにおける支配方程式を導出するような状況を想定している。このような流れをもとに、本研究は以下の3つのそれぞれに関わり合う研究内容から成っている:(1)離散群やLie群上のランダムウォークとその境界理論、(2)スケール極限と関わる統計力学モデルの種々のグラフ上での研究、(3)有限グラフの幾何学とその応用を目指す研究である。

## 2. 研究の目的

(1)離散群やLie群上のランダムウォークから定まる境界としてPoisson境界がある。これは群上のすべての有界調和関数を記述する境界である。この境界は多くの群でその幾何学的または代数的構造により、その同定がなされ

ている。本研究では、境界上に定まる調和測度も込めて詳細に調べる。またパーコレーションのようなランダムな無限グラフ上の有界調和関数の存在を調べ、その幾何学的性質を調べる。

(2)結晶格子上の排他過程と呼ばれる粒子系を中心に流体力学的極限を定式化し、証明を行う。

(3)有限グラフによるタンパク質のモデルについて位相幾何学的に調べられていることと実際の物性を繋ぐのが目標である。またこうしたモデルで現れるネットワークのマルコフ連鎖の混合時間の評価について研究を行う。

## 3. 研究の方法

(1)基本的な例である3次元可解Lie群上のランダムウォークを詳しく調べる。その無限遠での振る舞い、特に無限遠境界に現れる調和測度を詳しく調べるにあたり、調和解析で長年研究の蓄積のある自己相似測度との関係について調べる。またパーコレーションについては非従順グラフの場合、無限クラスターは、確率1でチーガー定数が0で、体積増大度が指数的事であることから、離散群における従順かつ体積増大度が指数的事である状況における研究と比較しながら進める。

(2)結晶格子上の流体力学極限において、これまで得られた結果をもとに大偏差原理を考察し、次のステップである非勾配系の解析を行う準備を行う。また、モデルをより一般の群作用のあるグラフに拡張する研究を行うことで、技術的に困難な点を明らかにする。

(3)これまでこのテーマについて議論を行って来た研究者と継続して研究を進めて行く。必要に応じてさらに研究者の輪を広げて行く。マルコフ連鎖の混合時間については、こ

れまでの研究の蓄積を踏まえ、群の場合などの定量的な評価が可能なものに注目し、代数的な性質との関連を調べる。

#### 4. 研究成果

(1) Montpellier 大学の Jeremie Brioussell 氏との共同研究により、我々は Sol やアファイン Lie 群 の有限台の確率測度をステップ分布に持つランダムウォークの境界挙動を考察した。この群に対しては、境界は実数直線で与えられることが、Kaimanovich の 90 年代の研究により、すでに知られていた。我々は、有限台の確率測度から定まるランダムウォークでは、調和測度が、実数直線上の Lebesgue 測度について、絶対連続になる場合と、特異連続になる場合とがあることを証明した。なお、 $SL(2, \mathbb{R})$  でも同様の問題を立てることが可能であるが、その場合は Bourgain (2012) などの研究により、同様の現象が知られている。Kaimanovich-Le Prince (2011) は  $SL(2, \mathbb{R})$  では有限台を持つランダムウォークから定まる調和測度は常に特異である（この場合境界は旗多様体、特異とはその上の smooth Lebesgue 測度のクラスについて、である）という予想を立てた。 $SL(2, \mathbb{R})$  の結果は、この予想の反例であり、我々の結果は Sol においても、類似の予想が成立しないことを示している。（なお、写像類群ではこの予想は成立することが知られている (Gadre, 2014)）。我々の結果は Bernoulli convolutions という調和解析において長い研究の歴史を持つランダムな幾何級数の研究を本質的に用いるものである。またランダム無限グラフの研究については、Paris 第5大学の Camille Male 氏 (CNRS) との共同研究により、彼の学位論文で導入されたランダムグラフの局所自由積について、その等周定数 (Cheeger 定数) を考察した。ここで、局所自由積は Bernoulli パーコレーションのように、ランダムネスのため、等周定数自身は

常に0なのであるが、「基点付き」等周定数は正になる。我々は、その値について詳細な評価を得た。現在、より一般の局所自由積の場合に議論を拡張する方向で研究を進めている。

(2) 結晶格子の流体力学極限において、対称単純排他過程に対する大偏差原理を証明した。また結晶格子の場合に導入した局所関数束を用い、グラフが有限生成 residually finite かつ従順な群の有限グラフの被覆になっているときに、流体力学極限にあらわれる粒子系モデルを定式化し、スケール極限を得るための第一ステップである局所エルゴート定理を定式化、証明することに成功した。また、この場合収束の速度の評価も超指数的であることがわかった。

(3) 有限群上のマルコフ連鎖について、Kazhdan 定数により混合時間を評価する手法を調べた。また物性物理との関連において、多孔質媒質をグラフによりモデル化し、その状況における混合時間について化学者と議論を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Jeremie Brioussell, Ryokichi Tanaka, Discrete random walks on the group Sol, arXiv:1306.6180[math.PR] 26 Jun 2013. to appear in Israel Journal of Mathematics. (査読有)

2. Ryokichi Tanaka: Hydrodynamic limit for weakly asymmetric simple exclusion processes in crystal lattices, Communications in Mathematical Physics, 315, 603-641 (2012) DOI 10.1007/s00220-012-1574-0

( 査読有 )

[ 学会発表 ] ( 計 16 件 )

1. Ryokichi Tanaka: “ Random walks on solvable Lie groups and their harmonic measures ” , Seminaire Analyse et Geometrie, 2014 年 2 月 11 日, Universite Paris Diderot 7, Paris, フランス
2. Ryokichi Tanaka: “ Discrete random walks on the group Sol ” , Seminaire de Theorie Ergodique, 2014 年 2 月 3 日, Universite de Rennes 1, フランス
3. Ryokichi Tanaka: “ Discrete random walks on the group Sol ” , Random walks on groups, 2014 年 1 月27-31日, Institute Henri Poincare, フランス
4. 田中亮吉: “ Harmonic measures for a solvable group ” , 関西確率論セミナー、京都大学 2013 年 10 月 11 日
5. 田中亮吉: “ Discrete random walks on the group Sol ” , 東北大学幾何セミナー、東北大学 2013 年 10 月 8 日
6. Ryokichi Tanaka: “ Discrete random walks on the group Sol ” , Dirichlet Forms and Applications, German-Japanese Meeting on Stochastic Analysis, 2013年9月9-13日, University of Leipzig, ドイツ
7. Ryokichi Tanaka: “ Random walks on groups of exponential volume growth ” , The 2nd workshop on Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics, 2013年8月5-9日, Hokkaido University
8. 田中亮吉: “ 可解群の調和測度 ” , 東北確率論セミナー, 東北大学 2013 年 7 月 19 日
9. Ryokichi Tanaka: “ Large deviations for random walks on nilpotent groups ” , Analysis Seminar, 2013 年 3 月 7 日, University of Ottawa, カナダ
10. Ryokichi Tanaka: “ The triviality of the boundary for nilpotent groups ’ ’ , Rigidity School, Tokyo 2012/2013, 2013 年 1 月 7-10 日, The University of Tokyo
11. Ryokichi Tanaka: “ A local ergodic theorem for an infinite tower of coverings ” , New developments in complex dynamical systems, 2012 年 12 月 11 日, Research Institute for Mathematical Sciences , 京都大学
12. Ryokichi Tanaka: “ A global law of large number on nilpotent groups ” , Séminaire Gaston Darboux, 2012 年 11 月 23 日, Institute de Mathematiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, science et techniques, フランス
13. Ryokichi Tanaka: “ Hydrodynamic limit for weakly asymmetric simple exclusion processes in crystal lattices ” , Oberseminar ANALYSIS-PROBABILITY, 2012 年 11 月 13 日, Max-Planck-Institute für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, ドイツ
14. Ryokichi Tanaka: “ A local ergodic theorem and its application to crystal lattices ” , workshop, Random Media , 2012 年 9 月 3-7 日, WPI-AIMR, 東北大学

15. Ryokichi Tanaka: “A local ergodic theorem for an infinite tower of coverings”, workshop, Discrete Geometric Analysis, 2012年8月27-31日, Research Institute for Mathematical Sciences, 京都大学

16. Ryokichi Tanaka: “Large deviation for a random walk on a group of polynomial growth”, 11<sup>th</sup> workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2012年7月5-6日, 東京大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等 なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 亮吉 (TANAKA Ryokichi)

東北大学・原子分子材料科学高等研究機構・助教

研究者番号: 80629759

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 連携研究者 なし