

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：12401

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840008

研究課題名(和文) 有理曲線族の研究と等質多様体の特徴付け

研究課題名(英文) Studies of families of rational curves and characterizations of homogeneous manifolds

研究代表者

渡辺 究 (WATANABE, Kiwamu)

埼玉大学・理工学研究科・助教

研究者番号：20638176

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：ネフな接束をもつファノ多様体の構造研究を行った。そのような多様体は有理等質多様体であることがCampanaとPeternellにより予想されている(CP予想)。まず、5次元かつピカル数が1より大きいファノ多様体に対して、CP予想が成り立つことを示した。この結果をまとめた論文はMath Zeitschriftから出版された。また、R. Munoz, G. Occhetta, L. Sola Conde, J. Wisniewskiとともに、全ての基本収縮射がP1ファイブレーションであるファノ多様体を研究し、完全旗多様体の特徴付けることに成功した。この結果は二本論文にまとめ、現在投稿中である。

研究成果の概要(英文)：I have studied Fano manifolds with nef tangent bundles. It is conjectured that such manifolds are rational and homogeneous by Campana and Peternell, which is called the CP conjecture. First, I proved that the conjecture holds for Fano 5-folds of Picard number >1 . The result was published from Math Zeitschrift. On the other hand, I studied some problems related to the CP conjecture with R. Munoz, G. Occhetta, L. Sola Conde and J. Wisniewski. In particular, we proved that Fano manifolds whose elementary contractions are smooth P1-fibrations are complete flag manifolds. As a corollary, the CP conjecture can be boiled down to another problem. We wrote two papers on this topic and these papers are submitted.

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ファノ多様体 ネフ接束 等質多様体

1. 研究開始当初の背景

森重文は 1979 年に有理曲線の変形理論を用いることによりハーツホーン予想を解決した：「豊富な接束をもつ非特異射影多様体は射影空間である」。この結果を出発点として、森による端射線の理論が構築され、川又雄二郎, V. V. Shokurov, M. Ried 等の貢献により (特異点を持つ場合も含めた) 極小モデル理論の基礎が完成した。また、森の上記論文は正標数還元テクニックや有理曲線の変形理論の礎になった結果を多く含んでおり、歴史的にとっても重要である。さらに、ハーツホーン予想は複素微分幾何におけるフランク予想 (1980 年に Siu と Yau により解決) の一般化としても知られている：「正則双断面曲率が正のコンパクトケーラー多様体は射影空間である」。さらに、Siu と Yau は一般化フランク予想を提起した。その予想は特にファノ多様体の場合に帰着されることが知られていた。一般化フランク予想をファノ多様体の場合に述べると、「正則双断面曲率が非負のファノ多様体はエルミート対称空間である」ということが出来る。この予想は 1988 年に N. Mok により、森の手法の一般化である VMRT の理論とホロノミー群の分類結果を用いることで解決された。これらの結果のさらなる一般化が、本研究の中心の問題である CP 予想である：

CP 予想: ネフな接束をもつファノ多様体は有理等質多様体である。

他方、ネフな接束をもつ射影多様体は、エタール被覆の差を除いて、トーラス上の滑らかなファイバー空間として記述可能で、そのファイバーとしてネフな接束をもつファノ多様体が現れる。従って、CP 予想の解決は、ネフな接束をもつ多様体の構造定理を与えることに他ならない。

2. 研究の目的

CP 予想は 4 次元以下の多様体では成立することが知られている。3 次元の場合は Campana-Peterzell により、4 次元の場合は最終的には、Mok と J. M. Hwang により解決された。特殊な系列の多様体に対しては、Pandharipande による超曲面の完全交叉の場合程度しか知られていない。そこで、本研究では CP 予想の解決することを目標に、様々なケースに対して CP 予想の研究を行った。また、関連した問題も扱った。

3. 研究の方法

次元が低くかつピカール数が 2 以上の場合の CP 予想に関しては、端射線の収縮射を考察することにより、より次元が低い場合に帰着することが出来る。そのため、基本収縮射を用いて研究を行った。具体的に X を 5 次元かつピカール数 2 以上のファノ多様体とし、

その接束がネフだとする。ピカール数が 2 以上なので、少なくとも 2 つの基本収縮射 f, g を X はもつが、接束のネフ性から f と g は非特異射であることが分かる。さらに、 f と g のファイバーや像も再びネフな接束をもつファノ多様体になる。このことにより、4 次元以下の分類結果を用いることで X の構造に関する情報を得ることが出来る。

他方、ハーツホーン予想や Hwang-Mok 等の結果は多様体 X 上の極小有理曲線のモジュライ空間 K とその普遍族 U を考察することにより得られている。 U は K 上 P^1 束の構造をもち、さらに、評価写像 $U \rightarrow X$ は滑らかな射となる。そこで、これら X, U, K の関係にのみ着目し、多様体 Y 上の P^1 束 Z のうち (P^1 束の自然な射影と異なる) 滑らかな射 $Z \rightarrow X$ をもつものの構造研究を行った。特に、VMRT や有理連結多様体などに関する有理曲線の変形理論、ある種の階数 2 のベクトル束の分類結果などを用いた。以下の研究成果で述べる「(ii) 完全旗多様体の特徴付け」では、リー環論も用いた。

4. 研究成果

主に、得た結果は以下の 2 つである。

(i) 5 次元かつピカール数 2 以上の場合に関する CP 予想の解決。

(ii) 完全旗多様体の特徴付け。

(i) に関して 5 次元かつピカール数 2 以上のファノ多様体のうちネフな接束をもつものを完全に分類した。その結果、この場合に対して CP 予想が肯定的に解決されることが分かった。さらに、ピカール数 1 の場合の考察も行った。この結果を論文「Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one」にまとめ、学術雑誌 *Mathematische Zeitschrift* に掲載された。

(ii) に関して R. Muñoz, G. Occhetta, L. Solá Conde, J. Wiśniewski との共同研究である。まず初めに、R. Muñoz, G. Occhetta, L. Solá Conde とともに、全ての基本収縮射が非特異 P^1 ファイブレーションでありネフな接束をもつファノ多様体の研究を行った。その結果、そのような多様体から自然に線形代数群を構成出来ることが分かった。特に、その線形代数群が A_n 型であるときに、ファノ多様体は P^n の完全旗多様体と同型になることを示した。この内容は論文「Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle」にまとめ、現在投稿中である。

その後、G. Occhetta, L. Solá Conde, J. Wiśniewski とともに、先の結果の一般化にあたる結果を得た。具体的には多様体が完全旗多様体であることと、全ての基本収縮射が非特異 P^1 ファイブレーションであるファノ多様体であることは同値であることを示した。

ここで、接束のネフ性は後半の結果では除外されていることに注意する。一般に完全旗多様体はファノ多様体であり、全ての基本収縮射が非特異 P1 ファイブレーションであることは良く知られているので、逆が問題である。そこで、 X を全ての基本収縮射が非特異 P1 ファイブレーションであるファノ多様体とする。 X が完全旗多様体であることの証明は2つのステップに分けられる。まず、第一段階では X に付随して線形代数群 G を構成出来ることを示した。具体的には、 X が多くの P1 ファイブレーションをもつことから、 X 上の1サイクルがつくるベクトル空間 $N^1(X)$ の対応を各 P1 ファイブレーションに対応して構成出来ることを示した。さらにそれらで生成される群 W の研究を行い、 $N^1(X)$ 上の内積をうまく取ると、 W は $N^1(X)$ 上のあるルート系のワイル群とみなせることをつきとめた。このことを用いて線形代数群 G を構成した。第二段階では、構成した G に対し、 X と G/B (B は G のボレル部分群) が同型であることを示した。そのために、 X に対して Bott-Samelson 多様体を導入し、各々の Bott-Samelson 多様体が同型であることを示すことにより $X=G/B$ を示した。ただし、この証明は G が F4 型、G2 型のときは成り立たないため、それらの場合は個別に研究を行った。この内容は論文「Fano manifolds whose elementary contractions are smooth P1-fibrations」にまとめ、現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計2件)

1. K. Watanabe, Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard numbers greater than one, Math. Z. 276 (2014), no. 1-2, 39-49, 査読あり
DOI:10.1007/s00209-013-1185-2
2. K. Watanabe, On projective manifolds swept out by cubic varieties, International Journal of Mathematics, Volume: 23, Issue: 7, 2012, 査読あり
DOI: 10.1142/S0129167X12500589

〔学会発表〕(計17件)

1. 渡邊 究, Characterization of the complete flag manifold of type F4, 日本数学会年会, 学習院大学, 2014年3月15日.
2. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds and Campana-Peternell conjecture, University of Trento, Italy, 2014年2月19日.
3. 渡邊 究, 完全旗多様体の特徴付けと

Campana-Peternell 予想, 談話会, 東海大, 2014年1月22日.

4. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds and Campana-Peternell conjecture, Recent development of Fano manifolds, 京都大学, 2013年12月16-18日.
5. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds and Campana-Peternell conjecture, Mini workshop on birational geometry, 東京大学, 2013年11月21-22日.
6. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds and Campana-Peternell conjecture, Algebraic Geometry Seminar, 名古屋大学, 2013年11月18日.
7. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds and Campana-Peternell conjecture, Geometry of Projective Varieties and Related Topics, 2013, 高知大学, 2013年11月2-4日.
8. 渡邊 究, Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle, MSJ Autumn Meeting 2013, 愛媛大学, 2013年9月24-27日
9. 渡邊 究, Rational curves, Dynkin diagrams and Fano manifolds with nef tangent bundle, Hodge Theory and Algebraic Geometry, 東京電機大学, 2013年8月5-6日
10. 渡邊 究, Characterization of complete flag manifolds of classical type, Japanese-Spanish Workshop, Imperial College London, England. 2013年7月12日
11. 渡邊 究, On certain manifolds with nef tangent bundle, A.G.O. FRiDAYS, POSTECH, Korea, 2013年4月20日.
12. 渡邊 究, Fano 5-folds with nef tangent bundles, 日本数学会年会, 京都大学, 2013年3月20日.
13. 渡邊 究, Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard number greater than one, アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学, 2012年9月9日.
14. 渡邊 究, Fano 5-folds with nef tangent bundles and Picard number greater than one, University of Trento,

Italy, 2012年8月10日.

Uniwersytet Warszawski

15. 渡邊 究, Smooth P1-fibrations and Campana-Peternell conjecture, 東大数理代数幾何セミナー, 東京大学, 2012年6月4日.
16. 渡邊 究, P1-bundles over projective manifolds and Campana-Peternell conjecture, 都の西北代数幾何学セミナー, 早稲田大学, 2012年5月11日.
17. 渡邊 究, P1-bundles over projective manifolds and Campana-Peternell conjecture, 埼玉大学代数幾何講演会, 埼玉大学, 2012年4月25日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Kiwamu.Watanabe.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡邊 究 (WATANABE, Kiwamu)

埼玉大学・理工学研究科・助教

研究者番号: 20638176

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

Roberto Muñoz

Universidad Rey Juan Carlos

Gianluca Occhetta

Università di Trento

Luis E. Solá Conde

Universidad Rey Juan Carlos/KIAS

J. Wiśniewski