

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：13701

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840023

研究課題名(和文)トレリ群の有理コホモロジーと写像類群の無限次元表現のねじれ係数コホモロジーの研究

研究課題名(英文) Twisted cohomology of mapping class groups with infinite dimensional coefficients and rational cohomology of Torelli groups

研究代表者

佐藤 正寿 (Sato, Masatoshi)

岐阜大学・教育学部・助教

研究者番号：10632010

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：トレリ群とは、閉曲面の写像類群の部分群であり、閉曲面の整数係数1次ホモロジー群への作用において自明に作用するものとして定義される。本研究の目的は写像類群の有理コホモロジー類である、森田-Mumford類のトレリ群における挙動を調べることであった。成果としては、トレリ群においてではなく、そのある部分群において自明であることがわかった。

また、2次巡回群を係数とする閉曲面1次ホモロジー群に自明に作用する写像類群の部分群として、レベル2写像類群がある。本研究の成果として、このレベル2写像類群の最小生成系を1つ与え、そのアーベル化を決定し、これについてプレプリントを発表した。

研究成果の概要(英文)：The Torelli group is a subgroup of the mapping class group of a closed surface, and is defined as the kernel of the action of the mapping class group to the integral first homology group of the surface. The purpose of this research is to determine whether the Morita-Mumford classes vanish in the Torelli group or not. We cannot determine it, however, we showed that most of them vanish in some subgroup of the Torelli group.

The level 2 mapping class group is the subgroup of the mapping class group defined as the kernel of the action to the first homology group of the surface with coefficient in the cyclic group of order 2. We gave a minimal generating set of this group, and determined its abelianization, and posted a preprint.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：写像類群 群ホモロジー

1. 研究開始当初の背景

写像類群のコホモロジー環は種数について安定的には Madsen-Weiss により決定されている。これに対して、Torelli 群と呼ばれる写像類群の重要な部分群においては、そのコホモロジー群は決定されておらず、これに関して 2 つの未解決問題がある。森田-Mumford 類と呼ばれる写像類群上のコホモロジー類が非自明であるかどうか、2 次以上のコホモロジー群が有限生成かどうかである。なお、森田-Mumford 類とは写像類群の整数係数コホモロジー類の列であり、奇数次のものについては Torelli 群に制限すると自明であることは既に知られていた。偶数次について決定することが問題である。Torelli 群は写像類群からシンプレクティック群への全射の核として定義される。この完全列は Lyndon-Hochschild-Serre スペクトル系列を誘導するが、これを通して写像類群のコホモロジー類は、シンプレクティック群のねじれ係数コホモロジー類と関係する。特に、有限次元有理既約表現を係数にもつシンプレクティック群のコホモロジー群は、自明表現以外では自明であることが知られているため、Torelli 群の有理コホモロジー群が無限次元であるかどうかは、このスペクトル系列の各項に非自明なコホモロジー類が現れるかどうかと関連する。これを通して、森田-Mumford 類の Torelli 群における非自明性と、写像類群および線型群の、無限次元表現を調べることは互いに関係している。

2. 研究の目的

本研究の目的は以下の 2 点である。

- (1) Torelli 群の森田-Mumford 類を含むコホモロジー類を調べること
- (2) (1)に関連して、写像類群、シンプレクティック群の無限次元線型表現を係数にもつコホモロジー群を調べること

H を曲面の整数係数 1 次ホモロジー群とする。森田-Mumford 類を調べるにあたり、ねじれ森田-Mumford 類と呼ばれる、H のテンソル積、もしくは、H の外積を係数とするコホモロジー類の列が知られている。この中で、写像類群の 3 次ホモロジー類であるねじれ(2,1)-森田-Mumford 類は、Torelli 群に制限した際に非自明かどうかかわかっていない最も低次のホモロジー類である。

また、1. 研究当初の背景で述べたように、シンプレクティック群や写像類群の無限次元表現を調べることは、Torelli 群における森田-Mumford 類の挙動を知る上でも重要である。これらを調べるのが本研究の目的である。

関連して、ねじれ森田 Mumford 類はカップ積によって、互いに関係しているが、H の代わりに、曲面の基本群の群環の添加イデアルについて、高次の交叉積を考え、そのカップ積を調べることにより、この積構造をリフトすることができる。この積構造についても調べるのが目的である。

3. 研究の方法

Torelli 群の部分群として、境界を 1 つもつコンパクト曲面の包含列について、単位接束の半直積として得られる Mess 群がある。以前の河澄響矢氏との考察の下で、Torelli 群の 3 次コホモロジー類である、ねじれ(2,1)-森田-Mumford 類が Mess 群においては自明になることがわかっていた。したがって Mess 群よりも大きい Torelli 群の部分群において、3 次ホモロジー類を構成し、このねじれ(2,1)-森田-Mumford 類による評価を行い、その非自明性を調べることを考えた。そのために、まず部分群として、曲面上の円板上の配置空間の基本群による Mess 群の拡大について、LHS スペクトル系列を調べることにより、具体的に 3

次ホモロジー類をチェインレベルで構成する必要がある。

また、無限次元表現を調べる上で、まず写像類群よりも群の表示に対称性をもつ自由群の自己同型群について、無限次元表現を調べる。具体的には、有理群環 QH やこれに H を複数回テンソルしたものを係数とするねじれ係数 1 次ホモロジー群を計算する。これを求める方法として、Gersten による自由群の自己同型群の表示を用いた。

4 . 研究成果

本研究の目的は Torelli 群における H 係数コホモロジー群を調べることであったが、副次的に、非有向曲面においてレベル 2 写像類群と呼ばれる写像類群の部分群において、廣瀬進氏との共同研究として結果を得た。レベル 2 写像類群とは、曲面の $Z/2Z$ 係数 1 次ホモロジー群に自明に作用する写像類群の指数有限正規部分群である。特に本研究において、非有向曲面のレベル 2 写像類群の最小個数の生成系を 1 つ与え、そのアーベル化を決定した。この結果については以下のプレプリントを発表し、[学会発表]の欄に示すように 3 件の研究発表を行った。

A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, preprint, arXiv: 1306.5382.

なお、手法としては、まず mod 2 Johnson 準同型を計算することによって、生成系の位数の下からの評価を得ることに成功した。また、Szepietowski によって、すでにレベル 2 写像類群の有限生成系が与えられていたが、chain 関係式などの写像類群において知られているいくつかの関係式を組み合わせ、この生成系よりも小さい位数の生成系を構成することに成功した。この位数が得た下からの評価と一致しているため、最小の生成系であることがわかった。

また残念ながら、当初の目的であった、 $(2,1)$ -森田-Mumford 類については、Torelli 群において非自明であるかどうか決定することはできなかった。Torelli 群の部分群においていくつかの 3 次ホモロジー類を構成することには成功したが、これらの非自明性についてはまだわかっていない。しかし、 $(2,1)$ -森田-Mumford 類については、Mess 群の円板の配置空間の基本群による拡大に制限すると、非自明であることがわかった。また、無限次元表現については、自由群の自己同型群について、有理群環 QH 係数 1 次ホモロジー群、および、有理群環 QH と H を 1 つテンソルした係数の 1 次ホモロジー群を計算した。しかし、これらについては結果としてどれも自明であることがわかり、新しいコホモロジー類は見つからなかった。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 3 件)

佐藤正寿, A minimal generating set of the level -2 mapping class group of a non-orientable surface, 離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー, 京大数理解析研究所, 2014 年 1 月 22 日.

佐藤正寿, 廣瀬進, The mod 2 Johnson homomorphism and the abelianization of the level 2 mapping class groups of a non-orientable surface, リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学, 2013 年 8 月 26 日.

M. Sato, S. Hirose, The mod 2 Johnson homomorphism and the abelianization of the level 2 mapping

class groups of a non-orientable
surface, Workshop: Johnson
homomorphisms, University of
Tokyo, 2013年6月5日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www1.gifu-u.ac.jp/~msato/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 正寿 (SATO Masatoshi)

岐阜大学・教育学部・助教

研究者番号：10632010

(2) 研究分担者

無

(3) 連携研究者

無