

平成 26 年 5 月 27 日現在

機関番号：32642

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840038

研究課題名(和文) デーンツイストの一般化の研究

研究課題名(英文) Research on generalized Dehn twists

研究代表者

久野 雄介 (Kuno, Yusuke)

津田塾大学・学芸学部・講師

研究者番号：80632760

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：一般デーンツイストは曲面上の単純とは限らないループに対し定義される。その考察は、写像類群の研究において曲面上の閉曲線の自己交差が重要であることを示唆する。本研究は、一般デーンツイスト、および関連した概念であるゴールドマン・テュラエフ・リー双代数を用いた写像類群の研究に取り組み、いくつかの結果を得た。また、ホモロジカル・ゴールドマン・リー代数とファットグラフ複体についても研究し成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Generalized Dehn twists are defined for loops on a surface which may have self intersections. Generalized Dehn twists suggest the importance of the self intersections of loops on a surface in the study of the mapping class group. The present project studied the mapping class group of a surface using generalized Dehn twists and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, which is a notion behind generalized Dehn twists. Also it investigated the homological Goldman Lie algebra and fatgraph complexes, and obtained several results.

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：写像類群 デーンツイスト ジョンソン準同型 ゴールドマン・リー代数 テュラエフ余括弧積

1. 研究開始当初の背景

(1) 20世紀前半に始まった、曲面の写像類群の研究において、自己交差を持たない閉曲線に沿うデーンツイストは基本的な役割を果たしている。その理由として、デーンツイストが写像類群の生成系を与え、群の有限表示に用いられ、写像類群の組み合わせ群論的研究には欠かせない対象であることと、局所的な微分同相写像であるために、種々の幾何学的な構成との相性が良いことが挙げられる。

(2) 曲面の写像類群を代数的に記述する一つの手段として、曲面上の曲線のホモトピー類の集合への自然な作用を考察することがある。2010年、河澄響矢氏と代表者の共同研究により、デーンツイストの曲面上の曲線への作用の代数的な記述が与えられた。この帰結から、曲面上の自己交差を持ちうる閉曲線に対し、それに沿うデーンツイストが定義されることが判明した。G. マシュヨー氏とV. テュラエフ氏によっても別のアプローチからデーンツイストの一般化が導入されていた。(arXiv: 1109.5248)

(3) 河澄氏と代表者の共同研究によって、ゴールドマン・テュラエフ・リー双代数と呼ばれる無限次元のリー双代数がジョンソン準同型と関係することが示されている。ジョンソン準同型とは、曲面の写像類群の重要な部分群である、トレリ群に付随するあるリー代数を、別のリー代数に埋め込む写像である。これはD. ジョンソンが導入し森田茂之により精密化された。ジョンソン準同型の像の決定問題は、写像類群の代数的構造に関する中心的問題の一つである。デーンツイストの一般化は、ゴールドマン・テュラエフ・リー双代数を用いて定式化される。ジョンソン準同型の像の解明に対して、デーンツイストの一般化が表している、曲面上の閉曲線の自己交差が持つ情報を用いたアプローチが期待されていた。

(4) デーンツイストの一般化について、本研究開始時点で分かっていたことは次のようになる。まず、閉曲線が単純ではない場合にも、デーンツイストはある種の局所性を持つこと。次に、それに沿うデーンツイストが曲面の微分同相では実現できない様な、曲面上の閉曲線が存在すること。これは閉曲線の自己交差を考察することによって示されていた。

2. 研究の目的

本研究は、デーンツイストの一般化が表している、曲面上の曲線の自己交差が持つ情報を抽出し、ジョンソン準同型への応用などに用いることを目指した。より詳しくは次の通り。
(1) デーンツイストの一般化の構成は代数的なものであり、その幾何学的側面は明らかではない。例えば、三次元多様体論の手法を通して、ホモロジーシリンダーのホモロジー同境界群との関係を解明し、デーンツイストの

一般化を幾何学的な見地から捉えること。

(2) デーンツイストの一般化について、組み紐群での類似や、高次元での類似を考察すること。

(3) テュラエフ余括弧積などの、曲面上の閉曲線の自己交差を測る演算を定量的に調べ、それが与える、ジョンソン準同型の像に関する制約の強さを調べる。換言すれば、曲面の微分同相写像を、ジョンソン準同型の値域の中で特徴付けること。関連して、曲面の微分同相写像では実現不可能な、デーンツイストの一般化の例を多く挙げる。

(4) ゴールドマン・テュラエフ・リー双代数およびその変種の構造を研究すること。

3. 研究の方法

(1) 矢口義朗氏(群馬高専)と研究協力をを行い、組み紐群における第一ジョンソン準同型の図式的表示について研究を行った。以前に得ていた結果に加えて、更にいくつかの考察を行った。次に、2次元組み紐の分類問題への応用を目指して、単純組み紐の作るフルビッツ系の考察を行った。2次元組み紐の不変量の構成方針は以下の通り。フルビッツ系を固定し、その対称群での像を考える。次に対称群の直積へのフルビッツ作用に関する、像の固定化群を特定し、その群の作用によって不変量を見出す。

(2) 河澄響矢氏(東大数理)と研究協力をを行い、ゴールドマン・テュラエフ・リー双代数とジョンソン準同型について研究した。最大の問題は、曲面上の閉曲線の自己交差を測るテュラエフ余括弧積と呼ばれる演算のテンソル表示の解明である。研究開始時点では、テンソル表示の最低次の項は次数 - 2であり、それはシェドラーの余括弧積と呼ばれる代数的な演算になることが分かっていた。より高次の項の解明と、シェドラーの余括弧積から抽出されるジョンソン像への制約の解明の二つに取り組んだ。

(3) デーンツイストの一般化の幾何学的解釈については、研究を進めることがほとんどできなかった。

(4) 河澄氏と戸田和樹氏(東濃フロンティア高校)との共同研究により、ゴールドマン・リー代数の変種である、ホモロジカル・ゴールドマン・リー代数の生成系について研究を行った。

4. 研究成果

(1) 矢口義朗氏(群馬高専)との研究協力においては、第一ジョンソン準同型に関する論文を準備中である。2次元組み紐の不変量の構成については、特殊な場合に限っても成功には至っていない。

(2) 河澄響矢氏(東大数理)との研究協力によるゴールドマン・テュラエフ・リー双代数とジョンソン準同型の研究においては、以下に挙げる成果を得た。シェドラーの余括弧積から、森田トレースと呼ばれる森田茂之が

1993年に導入したジョンソン像の障害を導出できることが分かった。テュラエフ余括弧積のテンソル表示の次数 - 1 と 0 の項は零であることを示した。一方、次数 1 以上の項は非自明であることが分かった。結果はプレプリント”Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, arXiv: 1112.3841v3 (2013)”にまとめられた。

(3) テュラエフ余括弧積のテンソル表示は、曲面の基本群にシンプレクティック展開と呼ばれる、ある意味での座標を導入することにより得られる。テュラエフ余括弧積のテンソル表示を高次の項も含めて統制する様な、良いシンプレクティック展開を構成するための考察を行った。arXiv: 1112.3841v3 において導入した、曲面上の基点付き閉曲線の自己交差を測る演算 μ に着目し、そのテンソル表示が満たすべきある方程式を導いた。この方程式の解で、シンプレクティック展開によらないものを一つ与えた。この解である、 μ の仮想的なテンソル表示は、テュラエフ余括弧積の簡明なテンソル表示を導くことを確認した。そこで、この解を実現する様なシンプレクティック展開が良いものであると考えられる。この様な、適当な付加条件を与えたシンプレクティック展開が存在するかどうかの問題として残された。

(4) 河澄氏と共同で、ジョンソン準同型とゴールドマン・テュラエフ・リー双代数に関する概説論文を執筆した。その中の一節で、デーンツイストの一般化についても解説を行った。プレプリント”Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, arXiv:1304.1885”にまとめられている。

(5) 河澄氏と戸田和樹氏(東濃フロンティア高校)との共同研究により、ホモロジーカル・ゴールドマン・リー代数の、曲面のホモロジー類からなる最小生成系の個数を決定した。(Osaka Journal of Mathematics に掲載予定。)S. P. ハンフリーズによる、デーンツイストによる写像類群の生成系の位数の最小値についての結果があるが、我々の結果はそれを想起させるものであり、関連があれば興味深い。

(6) その他の結果。R. ペナー氏、V. テュラエフ氏との共同研究によって、Riemann 面のモジュライ空間の組み合わせ的構造を記述する、ファットグラフ複体と呼ばれる複体について考察した。まず、森田・ペナー・コサイクルを含む、ファットグラフ複体の上で局所的な表示を持ついくつかの 1 コサイクルが、通常の曲面のホモロジー類によるマーキングの場合だけでなく、マーキングが可換の場合に拡張することを示した。その過程で、非常に簡明な表示を持つ、ある捩れ 1 コサイクルを発見した。これは、Earle 類と呼

ばれる、境界付き曲面の写像類群の、ある捩れ 1 次元コホモロジー類の 2 倍を与える。結果は Geometriae Dedicata 167, 151-166 (2013) に発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum topology に掲載決定, 査読有
Nariya Kawazumi, Yusuke Kuno and Kazuki Toda, Generators of the homological Goldman Lie algebra, Osaka Journal of Mathematics に掲載決定, 査読有

Yusuke Kuno, The generalized Dehn twist along a figure eight, Journal of Topology and Analysis **5**, 271-295 (2013), doi:10.1142/S1793525313500155, 査読有

Yusuke Kuno, Robert Penner and Vladimir Turaev, Marked fatgraph complexes and surface automorphisms, Geometriae Dedicata **167**, 151-166 (2013), doi:10.1007/s10711-012-9807-0, 査読有

Nariya Kawazumi and Yusuke Kuno, The center of the Goldman Lie algebra of a surface of infinite genus, Quarterly Journal of Mathematics **64**, 1167-1190 (2013), doi: 10.1093/qmath/has017, 査読有

[学会発表](計 9 件)

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, New Trends in Teichmuller Theory and Mapping Class Groups, 2014 年 2 月 13 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

久野雄介, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 幾何学コロキウム, 2014 年 1 月 9 日, 北海道大学大学院理学院数学専攻

Yusuke Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, 研究集会:ジョンソン準同型, 2013 年 6 月 6 日, 東京大学大学院数理科学研究科

久野雄介, Earle 類の Ptolemy 亜群への拡張について, 日本数学会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学

Yusuke Kuno, A generalization of Dehn twists, Seminar, 2013 年 2 月 13 日, Erwin Schrodinger Institute

久野雄介, Marked fatgraph complexes and surface automorphisms, Hurwitz action とその周辺, 2013 年 1 月 6 日, 群馬大学

久野雄介, A generalization of Dehn twists, 特異点セミナー, 2012 年 11 月 30 日, 東京理科大学

久野雄介, Dehn ツイストの一般化について I, II, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2012 年 9 月 10 日, 11 日, 京都大学数理解析研究所

久野雄介, Marked fatgraph complexes and surface automorphisms, リーマン面に関連する位相幾何学 2012, 2012 年 9 月 3 日, 東京大学大学院数理科学研究科

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

久野 雄介 (KUNO, Yusuke)

津田塾大学・学芸学部数学科・講師

研究者番号： 80632760