

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：34315

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2012～2013

課題番号：24840042

研究課題名(和文) Put-Call 対称化法の一般化とその応用

研究課題名(英文) Generalization of Put-Call Symmetry Method and Its Applications

研究代表者

今村 悠里 (Imamura, Yuri)

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：40633194

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000 円、(間接経費) 690,000 円

研究成果の概要(和文)：一般の確率過程に対する Put-Call 対称化を完全に与えるという成果が得られ、それは赤堀次郎氏との共著としてすでに公刊された。また、赤堀次郎氏と Flavia Barsotti 氏と現在行っている研究で、1次元拡散過程によって与えられるモデルの下で「タイミング」がその拡散過程の到達時刻で与えられる場合に、そのタイミングリスクの漸近的な静的ヘッジ公式と、その「ヘッジエラー」を与える公式が得られた。

研究成果の概要(英文)：Firstly, I have fully determined the Put-Call type symmetrizations for generic multi-dimensional diffusion processes. The results were published as a joint paper with Prof. Jiro Akahori at Ritsumeikan University. Secondly, I have obtained an asymptotic static hedge formula for a timing-risk under a one-dimensional diffusion model by collaborating with Jiro Akahori, and Flavia Barsotti from Unicredit (Milan).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数物系科学 数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：数理ファイナンス 静的ヘッジ タイミングリスク 漸近展開 Put-Call 対称化 ノックアウトオプション 社債

1. 研究開始当初の背景

本研究は、バリアーオプションのスタティックヘッジの研究に起源を持つ。ここで、スタティックヘッジとは、バリアーオプションを保有（または売却）することと、違うオプションを保有・売却することが同価値になるポートフォリオ（複数の金融商品の組み合わせ）を与えることである。近年バリアーオプションは実際の市場で普及しつつある。しかし、バリアーオプションの価値を評価することはプレーンオプション（ペイオフが満期の価格により決まるオプション）に比べて難しいとされている。この原因はバリアーオプションのペイオフが経路に依存しているところにある。例えばノックアウト型のバリアーオプションのペイオフは株価がある価格に到達すると消滅する。

その難点を解決する最初の手法は、Bowie と Carr により 1994 年に Risk Magazine に投稿された論文によって与えられた。その手法とは、Black-Scholes モデル（価格過程が幾何ブラウン運動に従うモデル）に対するバリアーオプションのスタティックヘッジ公式と今日呼ばれているものである。このスタティックヘッジ公式の導出において最も重要な役割を果たしていたのがブラウン運動の鏡像対称性である。ここでいう対称性は 1 次元の場合でいうとブラウン運動と i 1 倍されたブラウン運動が同分布であることをいう。一般の拡散過程はこの対称性を持たないため、同様にスタティックヘッジ公式を与えることは不可能である。しかし Carr と Lee は、2009 年に Mathematical Finance 誌に掲載された論文で、拡散過程の係数がバリアーの値に関してある対称性を有する場合、Arithmetic Put-Call Symmetry (APCS) と呼ばれる対称性を満たすことを示した。ここで APCS とはある 1 点（バリアー）に関してのみ、その拡散過程が対称性を持つことに他ならないが、スタティックヘッジ公式にはこの APCS で十分である。

しかし与えられた拡散過程がこの APCS を満たすことは一般には期待できない。そこで我々は逆に一般の拡散過程に対して APCS が成り立つような別の拡散過程を構成する方法を考案した。我々はこれを Put-Call 対称化と呼んでいる。この構成方法によってもスタティックヘッジ公式を導くことができるが、ここで構成された拡散過程は実際の市場には存在しないため、もはや実務上の意味をもたない。しかし、この公式によって経路依存したペイオフを持つバリアーオプションの価値が経路依存していないペイオフのオプションによって表現されている点は変わらない。

研究代表者は、石垣雄太・奥村敏樹らとの共同研究において、この式をバリアーオプションの新しい数値計算法と解釈し、この手法(+オイラー丸山近似)を CEV モデル・

Heston モデル・ SABR モデルに対し実装した。

2. 研究の目的

以上のような背景の下で、本研究は鏡像対称性を一般化した Put-Call symmetry と呼ばれる概念を数理ファイナンスおよび確率数値解析に応用することを目指すものであった。より具体的には、これまでに得られたバリアーオプションの価格計算に関する成果を

- (1) 多次元に拡張すること、および
- (2) 拡散過程の到達時間の汎関数の期待値の評価に応用すること、によって
- (3) アメリカンオプションの数値計算の新しい手法を提案する、および
- (4) クレジットリスクのスタティックヘッジという新概念を導入し、デフォルト可能債券の上に書かれたデリバティブの価格付け問題に取り組む。

ということを目的としていた。

3. 研究の方法

バリアーオプションのプレーンオプションによるスタティックヘッジ公式では、ブラウン運動の鏡像原理が本質的な役割を果たしていることがわかる。多次元ブラウン運動の密度関数が直交変換に関して不変であることから、鏡像原理を多次元へ一般化することができる。また、ルート系に付随する有限鏡像群の作用を考えることによって、ルート系の基本領域であるワイル領域に滞在するブラウン運動を考えることができる。これを鏡像群によって記述される多次元ブラウン運動の鏡像原理という。

この原理によりブラウン運動がワイル領域にとどまる確率は停止時刻に依存しない確率の有限和として記述される。高木健矢氏（当時：立命館大学総合理工学研究科博士課程前期課程）との共同研究では、この多次元の鏡像原理を多証券の上に書かれたノックアウトオプションのスタティックヘッジに応用することを考え、それが可能になる条件を完全に決定した。

この研究の枠組みはこれまで提案された多証券の上に書かれたノックアウトオプションのスタティックヘッジの一般化となっている。この観察が本研究のメインとなる手法である。

上記(2),(3)を研究することに先駆けて、研究期間中に主として取り組んだのは拡散過程それ自身とのあるレベルへの到達時間の同時汎関数に関してスタティックヘッジ公式に相当する関係式を導出することである。到達時間も含めた関数を考えることは

数理ファイナンスとして重要な一般化である。例えばアメリカンオプションのペイオフが（最適停止境界がわかっているならば）そのように表現できる。また、デフォルト可能債券及びその上に書かれたデリバティブのペイオフも到達時間に関して割引かれるので、そのようなものに分類される。研究代表者らは、このようなリスクを一般化してタイミングリスクと呼ぶことにした。

本研究期間中に、この課題に関して、「タイミングリスクの漸近展開」という新たな方法に到達し、その数学的正当化を研究の中心とするに至った。このタイミングリスクの漸近展開とは Carr-Bowie の Black-Scholes モデル下でのスタティックヘッジによって得られる誤差をまた別のタイミングリスクとみなし、それをまた Carr-Bowie の公式でスタティックヘッジし、その誤差を...と無限に繰り返すことで、漸近的に完全なスタティックヘッジができるであろうという着想である。このアイデアの数学的な表現は Parametrics という偏微分方程式における基本解の構成に用いられる古典的な手法であった。しかし本研究における Parametrics は通常のそれとは異なり、空間変数の多重微分の可積分性の評価と、その級数としての収束半径の評価が必要となり、数学的に非常に難点の多い研究に取り組むことを余儀なくされた。

4. 研究成果

上述した多次元の鏡像原理に対しても1次元の拡散過程の Put-Call 対称化の手法が適用可能であることを確認し、Heston モデルや -SABR モデルなどの確率ボラティリティモデルに対して我々の手法が適用可能であることを示した。また、多証券の上にかかれたバリアーオプションの数値計算手法も同様にして得られる。特に時間的に非斉次な拡散過程の場合にも応用可能であることが系として得られる。これらの成果は赤堀次郎氏との共著論文 "On a symmetrization of Diffusion processes" として Quantitative Finance 誌に掲載された(2014年5月時点では Published Online)。

また、上記「タイミングリスクのスタティックヘッジの漸近展開」については、赤堀次郎氏と Flavia Barsotti 氏と現在行っている研究で、1次元拡散過程によって与えられるモデルの下で「タイミング」がその拡散過程の到達時刻で与えられる場合に、そのタイミングリスクの漸近的な静的ヘッジ公式と、その「ヘッジエラー」を与える公式が得られた。バリアーオプションはブラックショールズモデルの下では静的ヘッジ可能であるが、一般の拡散過程によって与えられたモデルの下では静的ヘッジ可能性は期待できない。上述したように、Parametrics の手法を用いることによって、幾何ブラウン運動による展

開式が導出でき、ブラックショールズモデルの下での静的ヘッジ公式からタイミングリスクの漸近的な静的ヘッジ公式とそのエラー評価が得られることを明らかにした。この成果については下記にあるようにいくつかの学会・セミナーで発表している。数学的な結果という点での成果は、現時点では、空間変数の多重微分の可積分性の評価まで完成している。これらの成果を総合していくつかの論文をこれから執筆する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

著書名: Y. Imamura, K. Takagi, 論文標題: Semi-Static Hedging Based on a Generalized Reflection Principle on a Multi Dimensional Brownian Motion, 雑誌名: Asia-Pacific Financial Markets, 査読: 有、巻: 20、発行年: 2013、ページ: 71 - 81

著書名: J. Akahori, Y. Imamura, 論文標題: On a Symmetrization of Diffusion Processes, 雑誌名: Quantitative Finance, 査読: 有、巻: Published online, 発行年: 2013, DOI: 10.108

[学会発表](計 7 件)

発表者名: J. Akahori, Y. Imamura, T. Nakai, A. Naganawa, T. Shibutani, 発表標題: A diffusion approximation of a stochastic model of metastasis formation, 学会名等: The 45th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 発表年月日: 2013年11月2日、発表場所: 琉球大学(沖縄県)

発表者名: Y. Imamura, 発表標題: An Asymptotic Static Hedge of a Timing Risk and its Error, 学会名等: Stochastic processes and their statistics in Finance, 発表年月日: 2013年11月1日、発表場所: 沖縄青年会館(沖縄県)

発表者名: J. Akahori, Y. Imamura, H. Ohgaki, K. Uchida, 発表標題: Earthquake Insurance Reserves Implied by a Coherent Risk Measure, 学会名等: The 45th ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, 発表年月日: 2013年11月1日、発表場所: 琉球大学(沖縄県)

発表者名: R. Akimoto, Y. Imamura, N. Shimizu, 発表標題: The Put-Call Symmetry Method by a Higher-Order Scheme, 学会名等: The 45th ISCIE International Symposium on Stochastic

Systems Theory and Its Applications、
発表年月日：2013年11月1日、発表場
所：琉球大学（沖縄県）

発表者名：今村 悠里、発表標題：タイ
ミングリスクの静的ヘッジ、学会名等：
日本応用数理学会2013年度年会、発表年
月日：2013年9月11日、発表場所：ア
クロス福岡（福岡県）

発表者名：Y.Imamura、発表標題：Static
hedging of timing risk、学会名等：The
First International Workshop on
Quantum Information Theory and Related
Topics、発表年月日：2013年8月20日、
発表場所：ダナン（ベトナム）

発表者名：Y.Imamura、発表標題：An
Asymptotic Static Hedge of a Corporate
Defaultable Bond、学会名等：The Fifth
Florence-Ritsumeikan Workshop on
Stochastic Processes and Applications
to Finance and Risk Management、発表
年月日：2013年3月12日、発表場所：
フィレンツェ（イタリア）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今村 悠里（IMAMURA YURI）

立命館大学・理工学部・助教

研究者番号：40633194

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし