【基盤研究（S）】

p進的手法による数論幾何学の新展開

研究代表者	東北大学・理学研究科・教授 都築　暢夫（つづき　のぶお）　　研究者番号：10253048
研究課題情報	課題番号：24H00015　　研究期間：2024年度～2028年度 キーワード：スロープのジャンプ、フロベニウス写像、p進コホモロジー、リジッド解析幾何学、数論幾何学

なぜこの研究を行おうと思ったのか（研究の背景・目的）

●研究の全体像

数論幾何学とは、フェルマーの大定理における代数方程式

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \geq 3)$$

のような整数係数の方程式で定義される図形（以下、数論的代数多様体と言う）について、方程式を満たす有理点がどれぐらい存在するかや、付随するガロア表現・周期やゼータ関数などの性質を調べ、数論的代数多様体の姿を研究する分野である。p進的手法（pは素数）とは、数論的代数多様体の法p還元（pで割った余りで代数方程式を考える）やその持ち上げ（例えば、p進解析的持ち上げ）などを用いた研究方法で、本研究グループを含む多くの研究者により最近20年間で著しく発展した。本研究では、p進的手法を活用することで手が届くようになった数論幾何学の諸問題の解決に挑戦する。

有理数体$\mathbb{Q}$上の楕円曲線のルジャンドル族

$$X:\ y^2z = x(z-x)(z-tx)$$
$$\downarrow$$
$$C = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}:\ 変数\ t$$

$\Rightarrow$ 法p還元

p元体$\mathbb{F}_p$上のルジャンドル族

$$X(p):\ y^2z = x(z-x)(z-tx)$$
$$\downarrow$$
$$C(p) = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \setminus \{0,1,\infty\}$$

$\Downarrow$ 周期積分　　　$\Downarrow$ p進コホモロジー

ガウスの超幾何関数（指数½, ½, 1）

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-tx)}}$$

$\Rightarrow$ p進解析化

ガウスの超幾何微分方程式上のフロベニウス作用
（F-アイソクリスタル）

定理　$t = \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$における上の $F(t)$ のテーラー展開

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-\alpha)^n \qquad (a_n \in \mathbb{Q})$$

において、既約分数列a_nの分母における素数pのべき指数の増え方（p進対数的増大度）は、$t = \alpha$における法pファイバー$X_\alpha(p)$が通常曲線か、または、超特異曲線かにより決まる（図2）。

図1　p進的現象の例（pは素数）

●研究の背景

1960年代後半に、井草準一氏は「楕円曲線族の法p還元において、通常曲線のpべき等分点から定まるp進ガロア表現の超特異点におけるモノドロミーが巨大になる」という現象を発見した。90年代後半に、研究代表者が一般にスロープがジャンプする点においていつも類似の現象が起きることを示した。さらに、研究代表者はケドラヤ氏が提出した「最小スロープ予想」を2023年に解決し、その帰結として、この巨大なモノドロミーを持つp進表現からもとの楕円曲線族が決定できることを示した。しかしながら、この不思議な現象の本質的な意味は理解できているとは言えない。スロープのジャンプは数論幾何学におけるp進的現象の代表的なものであり、p進的手法を発展をさせることで理解が深まることが期待できる。

●研究の目的

この研究では、以下の3つの課題

A. スロープのジャンプをキーワードとしたp進的現象の探究とその数論幾何学的応用
B. 数論的微分方程式系のp進幾何学性とG-関数の特殊値の代数性・超越性
C. p進コホモロジー理論の更なる深化

を中心に、p進的手法による数論幾何学の研究を総合的に行うことを目的とする。

E：$\mathbb{F}_p$上の楕円曲線

$$a = 1 + p - \#E(\mathbb{F}_p)$$

Eのゼータ関数

$$Z(E,t) = \frac{1-at+pt^2}{(1-t)(1-pt)}$$

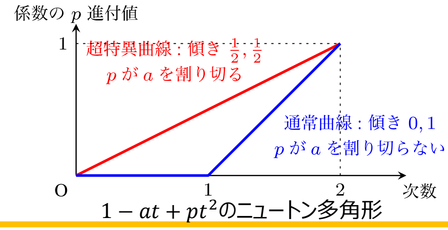

図2　有限体上の楕円曲線のスロープ

この研究によって何をどこまで明らかにしようとしているのか

●期待される成果

・スロープのジャンプに起因する数論幾何学の様々な現象の定量的考察とその本質的な意味の理解
・スロープのジャンプなどのp進的視点から有理数体$\mathbb{Q}$上の問題へのアプローチ方法の創出
・数論幾何学や代数幾何学に幅広く適用可能なp進的手法の開発

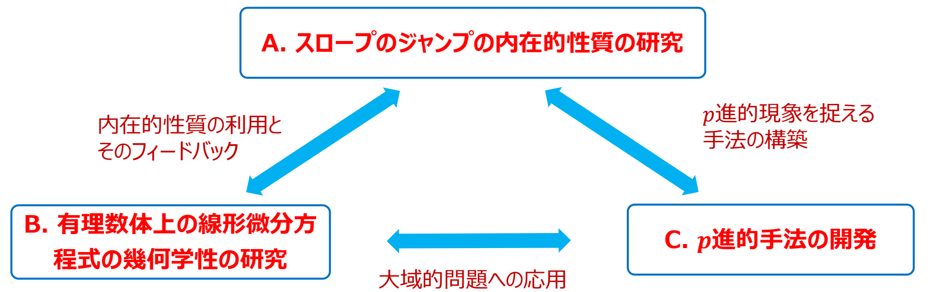

図3　井草の現象の不思議の研究における相互関係

●学術的独自性

数論幾何学にはℓ進とp進の2つの対等なコホモロジー論がある。スロープやそのジャンプは持ち上げを通してp進コホモロジーによって捉えることが自然である。研究代表者が解決した「最小スロープ予想」を起点とし、p進的手法、特に、p進コホモロジー理論を深化（課題C）させることで、井草氏が発見したスロープがジャンプする点の周りでは起きる現象の背後にある幾何学的または数論的意味の探究（課題A）が可能になる。有理数体$\mathbb{Q}$上の問題への応用（課題B）も併せて、この研究は本研究グループによるこれまでの研究成果に立脚し、それを深化させる独自の研究である。

●波及効果

・整数論や数論幾何学への応用とフィードバック
・代数幾何学や数理物理学への応用 -- 微分方程式の級数解の係数の整数性など有理整数環$\mathbb{Z}$上の考察の重要性が増していて、p進的手法の応用の可能性が広がっている。
・p進的手法を通し数理現象の代数学的理解 -- 研究代表者による「アーベル多様体上の非自明代数曲線族の不存在」の証明（2021）など

ホームページ等	http://www.math.tohoku.ac.jp/~tsuzuki/