【基盤研究（Ｓ）】

波動場の臨界相互作用の解析

研究代表者	早稲田大学・理工学術院・教授 小澤　徹（おざわ　とおる）	研究者番号：70204196
研究課題情報	課題番号：24H00024 キーワード：波動場、臨界相互作用、修正エネルギー、ハミルトン構造	研究期間：2024年度～2028年度

なぜこの研究を行おうと思ったのか（研究の背景・目的）

●研究の全体像

① 研究対象としての波動場 波動場(wave field)とは物質場、電磁場、重力場などの場の古典論(classical field theory)に現れる非線型波動のことである。非線型クライン・ゴルドン場、非線型シュレディンガー場、非線型ディラック場及びマクスウェル・シュレディンガー場を記述する（実または複素）スカラー場やゲージ場が代表例であり、それらの場は数学的にはそれぞれ、自己相互作用をもつ非線型クライン・ゴルドン方程式、非線型シュレディンガー方程式、非線型ディラック方程式及びスカラー場とゲージ場の相互作用系としてのマクスウェル・シュレディンガー方程式系の解として認識されるものである。それらの解はしばしば波動函数と呼ばれ、時空変数を独立変数とするスカラー値またはベクトル値函数として表される。ミクロな対象に関する現象を扱う場の量子論(quantum field theory)は、場の量が作用素となるなど異なる定式化を取るものの、古典論との類似性も高く、その数学的基礎は古典場の数学的理解に支えられている。

場の古典論に現れる**非線型偏微分方程式**

双曲型の例･･･非線型波動方程式　$(\partial_t^2-\Delta)\varphi=\Box\varphi=f(\varphi)$

非線型クライン・ゴルドン方程式　$\Box\varphi+\varphi=f(\varphi)$

分散型の例･･･非線型シュレディンガー方程式　$i\partial_t\varphi+\Delta\varphi=f(\varphi)$

楕円型の例･･･定在波を記述する方程式　$-\Delta\varphi+\lambda\varphi=f(\varphi)$

ここにφは$(1+n)$次元時空上の実数値または複素数値函数、Δは n次元ラプラス作用素、fは自己相互作用を表す複素函数でλは正定数とする。

図1　場の古典場に現れる非線型偏微分方程式

② 波動場の数学的研究の沿革 波動場の最単純模型（モデル）である非線型クライン・ゴルドン方程式や非線形波動方程式が現代数学的な枠組で論じられるようになったのは、JörgensやSegalの先駆的な論文が現れた1960年代初頭である。以来70年が経過し、非線型クライン・ゴルドン方程式、非線型波動方程式、非線型シュレディンガー方程式をはじめとする単独スカラー場の研究については、精密で深い理論体系が整備されている。その過程において、函数解析、調和解析、幾何解析、実解析、確率解析等の関連する解析学諸分野の発展が促された経緯は注目に値する歴史的事実である。実際、上記Segalの論文題目 “Non-linear Semi-groups” や、この分野に調和解析、整数論、確率論、組合せ論の手法を導入したBourgainやTaoのフィールズ賞受賞（それぞれ1994年と2006年）はその象徴的な事例である。波動場を対象とした数学の分野を「非線形波動方程式」と称する場合、狭義には双曲型方程式と分散型方程式を意味するが、孤立波の安定性等も自然な興味の対象とすれば、非線型楕円型方程式や変分問題をも含むことになる。また、非線型項の評価の基礎となる埋蔵不等式や基本解に付随する振動積分の有界性等、関連する函数空間論、調和解析、幾何解析の諸問題も自然な興味の対象となる。このように「非線形波動方程式」の研究分野は解析学の中でも既に一大分野を形成しており、多くの研究者を国内外に抱えつつ、現在益々盛んに研究されている分野である。

③ 近年の世界的研究動向 エネルギー臨界散乱理論や質量臨界爆発率同定問題をはじめ、この四半世紀で多くの未解決問題が肯定的に解決し、高度な理論に体系化された。懸案の未解決問題の多くが解決した現在、研究の流れは大きく「様々な方程式への応用」と「理論体系の更なる精密化」の二つに向かっている。前者は多くの成果（長い計算を要する論文の量産）、後者はより精密な理解（指数の増えた函数空間の導入）をもたらしており、波動場の研究に新機軸となる考え方が必要となっている。

④ 研究の目的 本研究は、

(i) 簡約化方程式系からみた臨界相互作用の零構造の微細構造

(ii) 時間並進対称性からみた繰り込み高次エネルギーの変分構造

(iii) 有界性と完備性からみたハミルトン構造

の三つの観点から、(a) 漸近解析 (b) 調和解析・幾何解析 (c) 変分解析の三つの方法論による総合的研究に取組み、最終的に函数解析の一分野をなす非線型発展方程式の抽象理論にまとめ上げることを目的とする。零構造からみた臨界相互作用の分類や特徴づけを通して、特性法によるピカール逐次近似の閉じた理論体系などの時間局所理論や、解の長時間的挙動の記述などの時空大域理論に新たな切り口を見出すとともに、厖大な既存の理論を現代的に再構築し、双曲構造とハミルトン構造（または分散構造とハミルトン構造）の二つの大きな視点から波動場の臨界相互作用の零構造を全体像として描き出すことが本研究の目的である。

●研究計画

① 研究環境の整備

早稲田大学応用物理学科数理物理学研究室を日常的に共同研究を遂行できる場とし、研究の進捗状況を確認し、発展を探るため、研究班代表者が定期的に集結する。

② 国際研究集会の主催

・Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations
京都大学数理解析研究所、毎年７月上旬（プログラム委員）

・International Workshop on Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics 早稲田大学、毎年7月下旬（組織委員）

・Sapporo Symposium on Partial Differential Equations
北海道大学、毎年８月（プログラム委員）

・Nonlinear PDE Session, ISAAC Congress 隔年（奇数年）夏（組織委員）

③ ピサ大学数学科との頭脳循環

・共同研究の推進　Vladimir Georgiev（二波および三波相互作用系）
Nicola Visciglia　（修正エネルギー法とその応用）
Jacopo Bellazzini （シュレディンガー・ポワソン系の変分問題）

・コチュテルプログラム協定による大学院共同指導

この研究によって何をどこまで明らかにしようとしているのか

●本研究の学術的独自性と創造性

本研究は、連立方程式系の臨界相互作用の零構造の微細構造の探究とともに、スカラー場の研究で得られた新しい視点と方法論をベクトル場に適用することにより、波動場の研究を変革して行こうとするものである。また、本研究は個別の題材を対象に、今まで独立に用いられることの多かった

(a) 漸近解析的方法

(b) 調和解析・幾何解析的方法

(c) 変分解析的方法

を相補的に活用することにより、波動場の研究に新たな方向性を提示するばかりでなく、解析学諸分野の既存の理論体系に対しても新たな視点や方法論の導入を図るものである。学問的に立場の異なる方法論を、広い観点から大きく繋いで理解しようと云う視点を明確に打ち出した研究体制は本研究の学術的独自性を支えるものであり、立場を超えた見方を獲得することで、より深い理解に到達するとともに、次の新理論の礎へと繋ぐ波及効果は本研究の大きな意義と創造性を示すものである。

●本研究の到達目標

研究の全体像④の三つを主な研究の観点とし、関連する解析学の諸問題に取り組む。

(i) 簡約化方程式系からみた臨界相互作用の零構造の微細構造

高周波漸近解析による簡約化方程式系の導出を様々な具体例に適用し、零構造や解の漸近挙動と の関連を一般的な枠組で検討する。その過程で弱零構造を簡約化方程式系の解により特徴づけ、既存の定義の系統図を描き、体系化する。

(ii) 時間並進対称性からみた修正エネルギーの変分構造

様々なベクトル場に対して時間微分の視点から高次エネルギーに繰り込まれた項を特徴づけ、線型項と非線型項の相互作用の関係を明らかにする。さらに、高次修正エネルギーを高次変分公式として特徴づけ、その変分構造を明らかにする。

(iii) 有界性と完備性からみたハミルトン構造

点列コンパクト性に依存しない方法論を様々なベクトル場に適用し、ハミルトン構造との関係を明らかにする。ハミルトン構造をもつ臨界相互作用に対する時間大域解の存在定理の加藤敏夫の一般論において基礎を成す点列コンパクト性を再検討し、有界性と完備性の概念のみで理論の体系化を図り、臨界相互作用のハミルトン構造の定量的性質を明らかにする。

ホームページ等	http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html