

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料
〔平成28年度研究進捗評価用〕

平成25年度採択分
平成28年3月17日現在

計算代数統計による統計と関連数学領域の革新

Innovation in statistics and related mathematics through
computational algebraic statistics

課題番号：25220001

竹村 彰通 (TAKEMURA AKIMICHI)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授



研究の概要

本事業では、近年発展の著しい計算代数統計の分野の発展を加速することにより、数理統計学全般を代数的手法によって変革するとともに、統計学から提示される具体的な諸問題の研究により、可換環論やD加群理論などの関連する数学領域の研究においても変革をもたらすことを目的とする。

研究分野：情報学

キーワード：統計的推測、計算代数統計

1. 研究開始当初の背景

本研究の研究代表者および研究分担者のこれまでの共同研究で、計算代数統計という新しい分野における目覚ましい成果が得られ、次世代の研究者の層も厚くなっていた。統計学者と数学者が密に協働する共同研究グループは国際的にも類を見ないものであり、この共同研究を加速することにより、統計学全般および関連する数学領域の革新を国際的に先導することを目指すこととした。

2. 研究の目的

計算代数統計分野の発展を加速することにより数理統計学を代数的手法によって変革するとともに、統計学から提示される具体的な諸問題の研究により、可換環論やD加群理論などの関連する数学領域においても変革をもたらすことを目指す。特に本研究以前からの共同研究の中から生まれたホロノミック勾配法(HGM, Holonomic Gradient Method)は、微分作用素環のグレブナー基底、微分方程式の数値解法、統計的推定理論などの広い分野にまたがる方法であり、その進展は波及効果が大きく、また我が国で生まれた方法であるため、国際的な研究を先導する。

3. 研究の方法

研究代表者および研究分担者がそれぞれの専門性を生かしつつ、統計学の提供する諸問題について共同で研究を進めている。竹村は数理統計学の立場から課題設定をおこない、代数的な手法を数理統計学の問題に応用する。分担者の高山はD加群の計算理論の研究および計算機実装をおこなう。日比はマルコフ基底とトーリックイデアルの理論の研

究を推進する。研究形態としては、国際研究集会の開催により国内外の主要な研究者との交流をおこなうとともに、海外の学会において積極的に研究成果を発表している。次世代の研究者の育成も順調に進んでいる。

4. これまでの成果

本研究の中心課題であるホロノミック勾配法に関しては、研究が極めて順調に進展している。この方法の有用性は広く認識されることとなり、竹村はこの業績により日本数学会2015年度解析学賞を受賞した。

ホロノミック勾配法に関する具体的な研究成果としては、まず正規分布のもとでの標本分布論への応用があげられる。ホロノミック勾配法により、球体確率及び象限確率の計算において既存の方法を上回る精度と速度が得られた。また標本歪度に対応する標準正規変量の3乗和の密度関数の満たす微分方程式系が導かれ、有限標本での密度関数の高精度の数値計算が可能となった。

また、統計学以外への応用としては、無線通信分野における多入力多出力系(MIMO, Multiple Input Multiple Output)の復号方式の性能評価へのホロノミック勾配法の応用があげられる。無線通信分野の統計的評価では、複素多変量正規分布や複素ウィシャート分布が用いられるが、ホロノミック勾配法によってこれらの分布のもとでのSN比の分布の数値的評価が可能となった。

さらに、分割表の対立仮説のもとでの条件つき分布として現れるA-分布については、マルコフ基底は研究されていたが、正規化定数自体の研究は皆無であった。正規化定数の計

算には、計算代数分野で最近多くのブレイクスルーをもたらしている手法である Macaulay 型行列を活用して、効率的実行アルゴリズムを与えた。以上の計算手法を基礎として、A-分布の条件付き最尤推定問題の可解条件およびホロノミック勾配法による解法を与えた。2 元分割表の研究においては、ねじれコホモロジーの手法を用いてホロノミック勾配法のための差分方程式を多項式時間で導出する卓越した手法が考案され、これにより例えば 7×7 分割表の正規化定数の有理数による厳密計算が可能となり、モンテカルロ法や漸進理論が機能しない領域での計算が可能となった。

ホロノミック勾配法の成果については、広く統計解析に用いられている R の CRAN パッケージとして公開していることも一つの重要な成果と言える。これにより理論および計算の研究へのフィードバックが得られている。例えばパッケージの公開を通して random matrix 関連の計算においてホロノミック勾配法が難しい領域が明らかになってきており、今後の研究の指針となっている。

Diaconis and Sturmfels(1998)による計算代数統計学黎明期からの重要な課題としては、マルコフ基底やそれと同値のトーリックイデアルの研究がある。マルコフ基底については、所与の配置行列のファイバーからなる新たな配置行列の無限系列を定義し、それらに対応するマルコフ基底の複雑度に関する基本的な結果を得た。

またトーリックイデアルの実験計画法への応用に関する研究において、一般的にはグレブナー基底は二次二項式に加え三次二項式を必要とするが、これらの二項式のうち二次二項式だけでもトーリックイデアルを生成する一部実施計画が確認された。2 水準系の計画については、カットイデアルの理論を使う手法が既知であるが、当該研究成果は多水準系の計画に付随するトーリックイデアルに関する初めての結果である。

また、順序凸多面体の中心的対象配置のトーリックイデアルが、逆辞書式順序に関する二次のグレブナー基底を持つことが示され、その配置の凸閉包であるファノ凸多面体が反射的凸多面体であることが証明された。順序凸多面体は、組み合わせ論、可換代数、代数幾何、表現論など、さまざまな分野に現れる最も著名な凸多面体の類の一つである。

最後に、計算代数統計の話題とはやや離れるが、時系列解析の標準的モデルである ARMA モデルについて、偏自己相関係数のゼロへの収束の速さが、モデルの $AR(\infty)$ 表現の係数のゼロへの収束の速さと等しいことを証明した。この事実の証明はこれまで与えられていなかった。この証明の過程で、ARMA モデルの有理式としての代数的な性質を用いており計算代数統計の知見が生かされて

いる。

5. 今後の計画

ホロノミック勾配法の研究においては、多変量正規分布のもとでの標本分布論として古典的な重要性を持つ行列変数の超幾何関数の数値計算の研究を進める。A-分布の計算の高速化にも取り組む。

また無線通信分野への応用をさらに進め、さまざまな復号方式の性能解析にホロノミック勾配法を適用する。

マルコフ基底の研究においては、実験計画法に現れる配置行列の研究をさらに進める。

時系列解析においては、有理関数モデルである ARMA モデルをホロノミック関数の観点から拡張したモデルを研究する。

6. これまでの発表論文等 (受賞等も含む)

・竹村彰通、日本数学会 2015 年度解析学賞、業績題目:「ホロノミック勾配法に関する研究」<http://mathsoc.jp/publicity/analysis2015.html>

・ Exponential decay rate of partial autocorrelation coefficients of ARMA and short-memory processes. *Statistics and Probability Letters*, **110**, 207-210. doi:10.1016/j.spl.2015.12.023.

A. Takemura. 2016.

・ Markov degree of configurations defined by fibers of a configuration. *Journal of Algebraic Statistics*, **6**, 80-107. doi:10.18409/jas.v6i2.38. Takayuki Koyama, Mitsunori Ogawa and A. Takemura. 2015.

・ Holonomic gradient method for distribution function of a weighted sum of noncentral chi-square random variables. *Computational Statistics*. doi:10.1007/s00180-015-0625-3. Tamio Koyama and A. Takemura. 2015.

・ Properties of powers of functions satisfying second-order linear differential equations with applications to statistics. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **32**, 553-572. doi:10.1007/s13160-015-0179-3. Naoki Marumo, Toshinori Oaku and A. Takemura. 2015.

・ MIMO Zero-Forcing performance evaluation using the holonomic gradient method. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **14**, 2322-2335. doi:10.1109/TWC.2014.2385075. Constantin Siriteanu, A. Takemura, Satoshi Kuriki, Hyundong Shin and Christoph Koutschan. 2015.

ホームページ等

<http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/atstat/kakenhi/h25s/>