様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月　３ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(A)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２４７００３

研究課題名（和文）幾何学的流れの自己相似解とGIT安定性

研究課題名（英文）Self-similar solutions of geometric flows and GIT stability

研究代表者
二木　昭人（Futaki, Akito）

東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：９０１４３２４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　31,900,000円

研究成果の概要（和文）：幾何学的対象となる曲がった空間が微分方程式をみたしながら時間発展して連続的に変形する時に生ずる特異点についての研究を行った．特異点の近傍を拡大した極限がどのように見えるかを調べると，自己相似解と呼ばれる特別な解にたどり着く．特異点形成を理解することは，この自己相似解を理解することに帰着される．研究期間内に得られた成果は，自己相似解が閉じた空間をなす時，その直径がある普遍的定数以上はあること，錐状空間の場合に自己相似解の得られるメカニズムを解明したこと，自己相似解としての空間の列が収束する時に保たれる性質を調べたことなどである．

研究成果の学術的意義や社会的意義
相対性理論における重力場の方程式は幾何学の言葉ではアインシュタイン計量にあたるものである．アインシュタイン計量の果たす役割は現代物理学においても大きい．本研究の幾何学的流れはアインシュタイン計量などの微分方程式の解として記述される重要な対象を求めるための有力な手段である．解は常に存在するとは限らず，存在するための必要十分条件を記述することが我々の研究分野の目的である．いわば，どのような空間が宇宙たりうるか，という問いに答えを出そうということである．

研究成果の概要（英文）：Geometric objects are curved spaces. I studied time-dependent deformations of such curved spaces satisfying differential equations. Usually singularities occur in finite time, and if we rescale the neighborhood of the singularities we arrive at the notion of self-similar solutions. During the research period of this fund I found the lower diameter bound of closed self-similar solution spaces, clarified the mechanism of the appearance of self-similar solutions on cone manifolds, and observed some properties of the limits of sequences of self-similar solutions.

研究分野：微分幾何学

キーワード：アインシュタイン計量　ケーラー多様体　Fano 多様体　リッチ流　リッチ・ソリトン　平均曲率流　自己相似解　安定性

１．　研究開始当初の背景

本研究は，リッチ流，平均曲率流などの幾何学的流れの特異点に関するブローアップ解析および自己相似解の解析をする一方，これまで幾何学的流れの特異点解析を用いて得られた結果を包括的に再検討し，幾何学の諸問題に応用することが目的であった．特に重要と考えていたのは，正のケーラー・アインシュタイン計量の存在と K 安定性との同値性に関する Yau-Tian-Donaldson 予想であり，これにつき，ケーラー・リッチ流およびその自己相似解であるケーラー･リッチ･ソリトンの解析を通して証明への道筋を把握することを目的としていた．しかしながら申請が採択となった頃，Yau-Tian-Donaldson 予想の解決が２つのグループによりアナウンスされた．もう一つの重要問題はカラビ・ヤウ多様体の中の特殊ラグランジアン部分多様体の存在と安定性との同値性に関する Thomas-Yau 予想で，平均曲率流およびその自己相似解の解析を通して証明への道筋を把握することを目的としていた．

２．　研究の目的

多様体の可微分構造，複素構造あるいはシンプレクティック構造などの内在的構造を調べるとき，幾何学的微分方程式の解を用いること，あるいは微分方程式に帰着することは自然であり，これまでそのような研究が多くなされてきた．微分方程式に解が存在しないとき，特異点でリスケイリングをしてバブルオフする解をみつけ，それをもとに多様体の構造を調べるという手法は，調和写像，ヤング・ミルズ方程式，擬正則曲線の研究において取られてきた．時間発展する幾何学的流れにおいては，有限時間で特異点が生ずるとき，いわゆる typeＩ 特異点においては，リスケイリングにより，自己相似解が得られる．幾何学的流れに対するこのようなブローアップ解析および自己相似解の研究を通して，流れの停留点である微分方程式の解の存在を示そうとするアプローチはこれまでに，目覚ましい成果をあげてきた．その典型的な成功例はリッチ流を用いたポアンカレ予想や球面定理の証明であろう．本研究課題は，このような研究の流れを包括的に再検討すると供に，それを幾何学の諸問題に応用することが目的であった．特に重要と考えているのは，ケーラー・アインシュタイン計量の存在と GIT 安定性との同値性を問う Yau-Tian-Donaldson 予想，カラビ・ヤウ多様体の中の特殊ラグランジアン部分多様体の存在と GIT 安定性との同値性を問う Thomas-Yau 予想へのアプローチであった．ケーラー・アインシュタイン計量を持つ Fano 多様体を GIT 安定性で特徴づける問題は Yau-Tian-Donaldson 予想と呼ばれる予想として定式化され，複素微分幾何の中心的問題の一つである．これに関する最初のCalabiの研究は1950年代に始まる．問題はリッチ曲率の符号に従い，第一Chern類が正，0，負の３つの場合に別れ，0 と負の場合には Yau とAubin により常にケーラー・アインシュタイン計量が存在することが証明された．残る第一Chern類が正の場合，K安定性と呼ばれる当該研究者の案出した障害を用いて記述される条件が必要十分条件となると予想されていたが，現時点ではこれは証明され，定理となった．本研究課題において，もう一つの重要な場合は Calabi-Yau 多様体の中で定義される特殊ラグランジュ部分多様体の存在問題であった．特殊ラグランジュ部分多様体はキャリブレーションという概念を用いて定義される体積最小ラグランジュ部分多様体である.特殊ラグランジュ部分多様体は物理学の超弦理論との関係が見いだされ，数学者及び物理学者からも活発に研究されている．特殊ラグランジュ部分多様体を得る自然な方法として，ラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って変形させる方法がある．平均曲率流に沿って多様体を変形させると多様体の体積は小さくなるので，もしその流れが時間無限大まで存在し，ある多様体に収束すれば，それは体積が最小なラグランジュ部分多様体，すなわち特殊ラグランジュ部分多様体を得ると考えられる．しかし一般にはラグランジュ部分多様体を平均曲率流に沿って流すと有限時間で特異点が生ずる．type Ｉ 特異点と呼ばれる特異点の場合，特異点の近傍を無限大に拡大するリスケイルするラグランジュ自己相似解が得られる．アインシュタイン計量がリッチ・ソリトンの特別な場合であるのと同様，極小部分多様体は自己相似解の特別な場合である.同様，特殊ラグランジュ部分多様体はラグランジュ自己相似解の特別な場合である．さて，いつこのプログラムが有効であるかということにつき，Thomas-Yau 予想はラグランジュ部分多様体に対して安定性の概念が定義され，ラグランジュ部分多様体が安定ならばその平均曲率流は時間無限大まで存在し，ハミルトン変形類の中の unique な特殊ラグランジュ部分多様体に収束するという予想である．

３．研究の方法

本研究は複素代数幾何，複素解析，リーマン幾何，シンプレクティック幾何など多岐にわたる分野が関連するため，他分野の研究者との交流を必要とする．そのため，国内外の研究集会への参加，講演を通して研究交流を行った．また研究室の大学院生も国内の研究集会に多数参加した．また，国内外の研究者を招いて以下のような研究集会を開催した．

平成25年度は第21回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した.この研究集会は大阪大学・満渕俊樹，名古屋大学・小林亮一，東北大学板・東重稔と共催する集会である．また，第9回日中幾何学研究集会を北海道大学，登別で開催した．この研究集会は日本と中国で隔年に開催する研究集会である．日本側の組織委員は当該研究者の他，東北大学・宮岡礼子，福岡大学・成慶明，大阪大学・満渕俊樹などである．Gang Tian, Weiping Zhang らが参加し，講演，討論を行った．東京大学数理科学研究科において Tokyo-Seoul Conference in Mathematics -Differential Geometry- を開催した．

平成26年度は第22回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した．　また，第１回 Trends in Modern Geometry を東京大学数理科学研究科において開催した．Gang Tian, Xiuxiong Chen, Dietmar Salamon らが参加した．

平成２７年度は第２回 Trends in Modern Geometry を東京大学数理科学研究科とホテルサンバレー那須において10th Pacific Rim Complex Geometry Conference を兼ねて開催した．Miguel Abreu, Michael Entov, Andre Neves らが参加した．また Princeton-Tokyo Workshop on Geometric Analysis を東京大学数理科学研究科において開催した．Raffe Mazzeo, Gang Tian, Jeff Viaclovsky らが参加した．

平成２８年度は第３回 Trends in Modern Geometry を東京大学数理科学研究科において開催した．Claude LeBrun, John Lott, Christopher Woodward らが参加した．

平成２９年度は第４回 Trends in Modern Geometry を東京大学数理科学研究科において開催した．Sébastien Boucksom, Simon Brendle, Huai-Dong Cao, Jean-Pierre Demailly, Matthew J. Gursky, Jean-Yves Welschinger らが参加した．

４．研究成果

(1) リッチ・ソリトンを持つコンパクト・リーマン多様体の直径の下からの評価を得た．平均曲率流の自己相似解についても類似の結果を得た．
(2) 平均曲率流の自己相似解に関するこれまでの研究の不満足な点として,自己相似解は Rn でしか定義されていなかったことがあげられる.当該研究者は服部広大と山本光との共同研究で自己相似解をリーマン錐多様体上で定義し直し,Huisken によるブローアップ解析などが自然な形で拡張することを示すとともに，錐多様体特有の現象も現れることを示した．
(3) 正のケーラー・アインシュタイン計量の存在と K-安定性の同値生の証明は，因子に沿って cone angle を持つケーラー・アインシュタイン計量を用いた証明が Chen-Donaldson-Sun により与えられた後,ケーラー・リッチ流を用いた証明,旧来の連続法を用いた証明が Chen-Sun-Wang, Datar-Szekelyhidi により更に与えられた．実際,第１Chern類が負か0の場合は Aubin と Yau によるモンジュ・アンペール方程式を用いる証明の他，Cao によるケーラー・リッチ流を用いた方法でも与えられる．第１Chern類が正の場合はケーラー・リッチ流を用いた証明はごく最近 Chen-Wang によりが与えられたが，その観点からリッチ流のGromov-Hausdorff収束ないし Cheeger-Gromov 収束に関する解析を精密に調べることは興味深い．こうした特異点解析はリッチ・ソリトンの研究と共に今後も引き続き研究する必要がある．今年度はこうした新しい技法をスカラー曲率一定ケーラー計量の存在に関する Yau 予想への応用の可能性を調べるとともに，基礎となる基本的結果の他の同種の問題への応用を試みた．その結果として，Fano-Ricci limit space というアイデアに本多小平，斎藤俊輔との共同研究により行き着いた．Fano-Ricci limit space において固有値,固有関数の収束を示したが,ポアソン構造が収束するかは自明ではなく，収束するための条件を求めた．
(4) Donaldson-Sun は両側からRicci が有界なケーラー・アインシュタイン多様体の無限列の Gromov-Hausdorff 極限の性質を調べ，極限は正規代数多様体であること，接錘は一意的であること,接錘の正則部分は佐々木・Einstein多様体の錘であることを示している.Cheeger-Coldong に始まるRicci limit space の理論では，接錘の性質を極限空間の性質に反映させることが議論の大筋である．その意味で，極限空間の接錘についての研究が第1歩である．そもそも，接錘が一意的かというのが基本的であるが，一般の Riemann 多様体の場合，Ricci 曲率が下から有界な列の極限空間は接錘が一意的でないことが Colding-Naber によって例をもって示されている．これまでの小野肇，Guofang Wang との共同研究で高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つことを証明したが，このことからトーリック佐々木・アインシュタイン多様体はトーリック・ダイアグラムという組み合わせ的データと同一視される．佐々木・アインシュタイン多様体に対する知見をケーラー多様体の列の Gromov-Hausdorff 極限の幾何に適用することを試みた．
(5) 共形的ケーラー，アインシュタイン・マックスウェル計量の研究においては佐々木・アインシュタイン計量と同様の体積最小原理を用いた研究が進展した.ケーラー・リッチソリトン,佐々木・アインシュタイン計量，アインシュタイン・マックスウェル・ケーラー計量のそれぞれの研

究につき，体積最小原理を共通の指導原理にして解析することにより，理解を深めた．これらの３つの計量の存在問題に共通することは, 正則キリングベクトル場をパラメータとして障害 Fut が存在すること，正則キリングベクトル場のなすパラメータ空間上に体積汎関数 Vol が定義され，正則キリングベクトル場 X における体積汎関数の微分が X における障害 Fut_X と一致することである：d Vol_X = Fut_X ．特に，アインシュタイン・マックスウェル・ケーラー計量の場合にこのような理解が得られたことは今年度の本研究の成果である．アインシュタイン・マックスウェル・ケーラー計量は比較的新しい研究対象で，４次元のアインシュタイン・マックスウェル方程式の解の特別な場合を高次元化したものである．この高次元化されたアインシュタイン・マックスウェル・ケーラー計量の存在問題はヤウ・ティアン・ドナルドソン予想の一般化に当たる．この場合の体積最小性原理において興味深いことは，体積汎関数が凸関数でも固有関数でもないため，臨界点が複数存在しうることである．ヒルツェブルグ曲面の場合に新しい臨界点があることが示され，既存の研究には現れなかった解の存在に関する解析を行った．さらに自己同型群の簡約可能性の証明を行い，その他の K安定性に関する事項の一般化に取り組んだ．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　8　件）

① Akito Futaki and Hajime Ono : Volume minimization and Conformally Kähler, Einstein-Maxwell geometry. J. Math. Soc. Japan. 70(2018), 1493-1521.
DOI https://doi.org/10.2969/jmsj/77837783 . 査読あり.

② Akito Futaki, Shouhei Honda and Shunsuke Saito : Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, Asian J. Math., 21(2017), 1015-1062.
DOI http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2017.v21.n6.a2 . 査読あり.

③ Akito Futak : Einstein metrics and GIT stability. II. Sugaku Expositions 28 (2015), pp. 231-249. 査読あり.

④ Akito Futaki : The weighted Laplacians on real and complex metric measure spaces, in Geometry and Analysis on Manifolds, In Memory of Professor Shoshichi Kobayashi, (eds. T.Ochiai et al), Progress in Mathematics, vol.308(2015), 343-351, Birkhauser. 査読あり.

⑤ Akito Futaki, Kota Hattori and Hikaru Yamamoto : Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones, Osaka J. Math., 51(2014), 1053-1079.
DOI https://doi.org/10.18910/50982 . 査読あり.

⑥ Akito Futaki, H.Z.Li and X.D.Li : On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons, Ann. Global Anal. Geom. 44 (2013), no. 2, 105--114.
DOI https://doi.org/10.1007/s10455-012-9358-5 . 査読あり.

⑦ Akito Futaki, Kota Hattori and Liviu Ornea : An integral invariant from the view point of locally conformally Kähler geometry, Manuscripta Math. 140 (2013), no. 1-2, 1--12.
DOI https://doi.org/10.1007/s00229-011-0527-9 . 査読あり.

⑧ Akito Futaki and Yuji Sano : Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons, Asian J. Math., 17(2013), No.1, 17-31.
DOI https://projecteuclid.org/euclid.ajm/1383923434. 査読あり.

〔学会発表〕（計　29　件）

1. Akito Futaki, Hessian formula for the norm squared moment maps and the structure of automorphisms, Constant Scalar Curvature Metrics in Kähler and Sasaki Geometry, M'etriques `a courbure scalaire constante en g'eom'etrie Kähl'eriene et Sasakienne. 15 - 19 January, 2018, Luminy France
2. Akito Futaki, Structure of automorphism group of conformally Einstein-Maxwell Kähler manifolds, The 3rd Japan-China Geometry Conference, Tohoku Forum for Creativity, Tohoku University, September 1 - 7, 2017.
3. Akito Futaki, Volume minimization and conformally Kähler Einstein-Maxwell metrics, PRIMA third congress, Oaxaca, Mexico, August 14 -- 18, 2017.
4. Akito Futaki, Hessian formula for the squared norm of moment maps and the structure of automorphisms, Hayama Symposium, Shona Village, July 15 -- 18, 2017.

5. Akito Futaki, Volume minimization principle and conformally Kähler Einstein-Maxwell geometry, Perspectives of Mathematics in the 21st Century: Conference in Celebration of the 90th Anniversary of Mathematics Department of Tsinghua University, Tsinghua University, Beijing, China, April 21--24, 2017.
6. Akito Futaki, Hessian formula for moment maps and the structure of automorphisms, "Introduction to Modern Mathematics" lecture series, Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China, April 21, 2017.
7. Akito Futaki, Volume minimization principle for conformally Kähler Einstein-Maxwell metrics, The 7-th International Workshop on Differential Geometry, Fukuoka University, Japan, March 23--27, 2017.
8. Akito Futaki, Volume minimization principle for KRS, SE and cKEM, International Conference on Differential Geometry, University of Macau, China, December 14, 2016.
9. Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, 11th Pacific Rim Complex Geometry Conference, University of Science and Technology of China, Hefei, China, July 28, 2016.
10. Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, Kähler Geometry, Einstein Metrics, and Generalizations, MSRI, Berkeley, California, March 21-25, 2016.
11. Akito Futaki, Introduction to K-stability in Kähler geometry II, Berkeley-Tokyo Winter School, University of California at Berkeley, February 18, 2016.
12. Akito Futaki, Introduction to K-stability in Kähler geometry I, Berkeley-Tokyo Winter School, University of California at Berkeley, February 17, 2016.
13. Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, 2015 Taipei Conference on Complex Geometry, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, December 19--23, 2015.
14. Akito Futaki, Weighted Laplacian on real and complex complete metric measure spaces, Recent Advances in Kähler Geometry, Vanderbilt University, Nashville, May 18-22, 2015.
15. Akito Futaki , Lower diameter bound for compact shrinking solitons, The Asian Mathematical Conference 2013, BEXCO, Busan, Korea, June 30 - July 4, 2013.
16. Akito Futaki, Special Lagrangian submanifolds and Lagrangian self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones, X. International Workshop, LIE THEORY AND ITS APPLICATIONS IN PHYSICS, Varna, Bulgaria, June 17 -- June 24, 2013.
17. Akito Futaki, Kähler-Einstein metrics and K-stability, Special Seminar, University of Bucharest, June 15, 2013.
18. Akito Futaki, Lower diameter bound for compact shrinking solitons, Extremal Kähler Metrics, Centre de recherches math\'ematiques, Universit'e de Montr'eal, May 26 - June 1, 2013.

他国内講演11件

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者　なし

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。