

令和元年6月4日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25247004

研究課題名(和文)幾何的三角圏と付随する原始形式

研究課題名(英文)Geometric triangulated category and associated primitive forms

研究代表者

齋藤 恭司 (Saito, Kyoji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・客員上級科学研究員

研究者番号：20012445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 33,490,000円

研究成果の概要(和文)：A. 鏡像対象性のLandau-Ginzburg 模型において、複素幾何学側の原始形式が定める平坦構造の母関数が、シンプレクティック幾何側のWitten不変量を数え上げるFJRW理論の母関数が一致することを例外型特異点の場合に示した。  
B. キャンセル可能なモノイドの増大関数の逆転公式をモノイドが束とは限らない全く一般の場合に示した。特に双対アルティンモノイドについて石部と共同で零点が(0,1]区間に集中する事を示し、Chapotonによる、二変数の場合の分析を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

A. 14個の例外型の特異点に対し示された結果は、Landau-Ginzburg 模型において初めて示された非自明な鏡像対象性でありそのあと Si Li 等により示された一般の場合の先導理論となった。非孤立特異点に対するドラムコホモロジーの接続性は今後の研究の基礎となる。  
B. 双対アルティンモノイドの逆転増大関数が直交多項式と強い親和性を示すことは全くの新しい現象で、応用上も重要と思われる。  
さらに上記のA.とB.の橋渡しをする理論を建設するのは将来の課題である。

研究成果の概要(英文)：A. We show that the generating function for the flat (Frobenius) structure associated with a primitive form coincides with the generating function counting the Witten invariant in FJRW-theory for the 14 unimodular exceptional singularities.  
B. We determined the inversion formula for growth function of a cancellative monoid which may not necessarily be a lattice. In particular, in case of dual Artin monoids, T. Ishibe found some orthogonal polynomial-like behavior of their real roots.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：原始形式 鏡像対称性 モノイドの増大関数 逆転公式 ドラム複体の直像

## 1. 研究開始当初の背景

A. 原始形式そのものは1980年代初めに周期積分を行うために被積分形式として導入されていたが、その具体構成法は知られていなかった。2012に始まる、Si Li氏との共同研究により、oscillatory integral factor を用いた、摂動近似的な方法が開発された。これにより、従来計算されていなかった例外型の原始形式が形式的に計算ができるようになった(当科研費に先行する科研費で行われた研究)。同じ時期に Ruan 等によりその鏡像対象側の FJRW 理論の建設が進み、両者の比較が可能になりつつあった。以上が当科研費で行われた鏡像対象性の研究の背景にある。

B. 当科研費に先行する科研費において、アルティンモノイドの増大関数が計算された。それは二点著しい特徴を持っていた。1. アルティンモノイドが束になる(最小公倍数を持つ)事を用いて、増大関数ではなくその逆転式が計算された。2. 逆転多項式は(0,1)区間にランク数だけ実根を持つ(他には実根をもたない)。したがって、当科研費で行われた1. モノイドが束でない場合の増大関数の逆転公式研究、2. 双対アルティンモノイドの逆転公式の零点を調べるのは、その自然な延長上にあった。

## 2. 研究の目的

A. 研究の背景でも述べた様に、原始形式は複素幾何学的な目的で構成されたものであったが、数理論理学における鏡像対称性における役割が認識されるに及んで、新たに、複素幾何学の圏の中で原始形式を位置付けする必要性が生じてきた。それは、ひとつには、研究分担者の高橋が行なった様に圏論的原始形式の理論の構築、もひとつには研究代表者と共同研究者(Si Li, Chenzheng Li, Yefeng Shen)と行った鏡像対象性の直接計算などの方向を生み出した。

B. 背景で述べた様な現象を理解するためにモノイドが束という条件を取り外して何が起きるのか、また、アルティンモノイドでない場合にも何が起きているのか調べるなどの、一般的な枠組みを構築する必要性が生じた。

## 3. 研究の方法

A. 原始形式の鏡像対称性における役割を直接検証するにあたり、その直前に開発された oscillatory integral factor を用いた、摂動近似的な方法が(幾何学的な情報でないにも関わらず)数え上げの母関数の計算に非常に有効に機能した。DWVV-方程式の縛りのために低次の数項が関数全体を決定する。

B. モノイドがキャンセル可能な場合、ミニマル公倍数の集合のタワーを考察することにより、数え上げの母関数を求めることができた。他方、双対アルティンモノイドについては、直交多項式に似たロドリゲス公式を満たすことが示せ、3項からなるリカーション関係が成立し、零点分布を順次調べることができる。

## 4. 研究成果

A. 鏡像対称性に直接関わる結果としては「14個の例外型の例外型の特異点に対し原始形式が唯一定まり、それから定まる平坦構造の母関数は、Arnold strange duality により定まる例外型特異点に対する Witten 不変量数え上げ(FJRW 理論)の母関数と一致する(発表論文4)」がある。それは直後に Si Li 等により一般の重み付き多項式に拡張された。これは鏡像対称性の理解への一里塚であるが、他方、数え上げの比較のみで幾何を含んでおらず未だ深い理解に達していない。理解を深めるために、その後、大域的周期写像の理解のために1)14個の例外型の場合の周期写像の記述、2)ディスクリミナントの補集合(特に楕円型、例外型)の記述、3)無限次元リー環を用いた universal family の記述、4)平坦構造を三角圏の安定性条件の空間の上への建設、4)孤立特異点とは限らない族に対する原始形式の理論の構築、などを進めている。4)の一部のみ(発表論文1)を除いて、研究を継続中である。

B. 「キャンセル可能なモノイドに対し公倍数のなす塔の数え上げにより、普通の数え上げ増大関数の逆転式を与えることができる(発表論文10)」およびその応用として単項イデアル環上の整行列のモノイド構造とその逆転公式の決定(発表論文6)」は基本的な成果と思われる。他方その証明はメビウスの逆転公式ではなくモノイドの積構造に基づくもので、数え上げでなく更にモチビクな基本構造として認識される。現在その視点から、更に二変数化する理論を構築しており公表を予定している。他方「双対アルティンモノイドが直交多項式と類似の性質を持つためにその零点が実区間(0,1]に集中する(発表論文6)」またその結果の Chapoton 二変数多項式への一般化(発表論文3)」現在のところ他に類似を見ない現象であり、その元来の分配関数の研究への応用、またはその原理的な理解双方の研究を促している。

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 12 件)

1. Kyoji Saito, Coherence of Direct Images of the De Rham Complex, Singularities and computer algebra, Springer, Chamberry, 2017 (2017) 223-256, (査読有り)  
10.1007/978-3-319-28829-1\_11
2. Kyoji Saito, Tadashi Ishibe, Zero loci of Skew-growth functions for dual Artin monoids, Journal of Algebra (2017), p1-21 (査読有り)  
10.1016/j.jalgebra.2016.11.032
3. Kyoji Saito, The Zero Loci of F-triangles, Acta Math. Vietnam. 42 (2017) p209-236  
10.1007/s40306-017-0202-7
4. Li, Changzheng; Li, Si; Saito, Kyoji; Shen Yefeng, Mirror symmetry for exceptional unimodular singularities, J. European Mathematical Society, 19 (2017) p1189-1229
5. Atsushi Takahashi, et.al, On the Frobenius Manifolds for Cusp Singularities, Advances in Mathematics, 273 (2015), p485-522 (査読有り)
6. Kyoji Saito, The skew growth function on the monoid of square matrices, Journal of Algebra, 402 (2014) p294-318 (査読有り)  
10.1016/j.jalgebra.2013.11.017
7. Masaki Kashiwara, et.al, Supercategorification of quantum Kac-Moody algebras II., Adv. Math. 265 (2014) p169-240 (査読有り)  
10.1016/j.aim.2014.07.036
8. Atsushi Takahashi, et.al, On rational Frobenius Manifolds of rank three with symmetries, Journal of Geometry and Physics, 84 (2014) p73-86 (査読有り)  
10.1016/j.geomphys.2014.05.030
9. Satoshi Kondo, et al, The Riemann-Roch theorem without denominators in motivic homotopy theory, Journal of Pure and Applied Algebra, 218 (2014) p1478-1495  
(査読有り) 10.1016/j.jpaa.2013.12.001
10. Kyoji Saito, Inversion formula for the growth function of a cancellative monoid, Journal of Algebra, 385 (2013) p314-332 (査読有り)  
10.1016/j.jalgebra.2013.01.037
11. Masaki Kashiwara, et.al., Supercategorification of quantum Kac-Moody algebras, Advanced Study of Mathematics, 242 (2013), p116-162 (査読有り)  
10.1016/j.aim.2013.04.008
12. Atsushi Takahashi et.al, Variance of the spectra of orbifold Landau-Ginzburg models, Mathematical Research Letters, 20 (2013), p51-65 (査読有り)  
10.4310/MRL.2013.v20.n1.a6

〔学会発表〕(計 21 件)

1. Kyoji Saito, Period domain for uni-modular exceptional singularities, The 5th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, Kagoshima, Japan, 2017 年 10 月 (招待講演)(国際学会)
2. Kyoji Saito, Coherence of relative de Rham complex, The 4th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium in Singularities, Chamberry, France, 2016 年 11 月 (招待講演)(国際学会)
3. Kyoji Saito, Coherence of relative de Rham complex, Categorical and analytical invariants in algebraic geometry 4, Moscow, Russia, 2016 年 9 月 (招待講演)(国際学

会)

4. Kyoji Saito, Zero loci of Chapoton triangles, Conference on wall crossing, deformation quantization, and resurgent analysis, Sendai, Japan, 2016年4月(招待講演)(国際学会)
5. Kyoji Saito, Primitive forms (I. Classical theory, II. Residue theory, III. Lie algebra construction), Conference 2 String field theory of the B-model, 2016年01月06日~2016年01月08日, Center for geometry and Physics, Pohang university, Korea (招待講演)(国際学会)
6. Kyoji Saito, Recent developments of interactions between mathematics and physics, Special colloquium at Hue university, 2015年11月30日~2015年12月04日, Hue university, Vietnam (招待講演)(国際学会)
7. Kyoji Saito, Skew growth functions and dual Artin monoids, 3rd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2015年11月30日~2015年12月04日, Hanoi institute of advanced study of mathematics, Vietnam (招待講演)(国際学会)
8. Kyoji Saito, Primitive automorphic forms on the extended symmetric domain of type IV, 18th Autumn Workshop on Number theory, 2015年11月06日~2015年11月10日, Hakuba Mount Hotel, Hakuba, Nagano (招待講演)(国際学会)
9. Kyoji Saito, Skew growth functions for dual Artin monoid, Categorical and analytic Invariants in Algebraic geometry 1 (Japan-Russia bilateral program), 2015年09月17日~2015年09月20日, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia (招待講演)(国際学会)
10. Kyoji Saito, From elliptic integrals to Primitive forms, Tokyo-Berkeley Summer School of Mathematics, 2015年07月21日~2015年07月24日, IPMU, the university of Tokyo, 千葉県柏市 (招待講演)(国際学会)
11. Kyoji Saito, Zero loci of skew growth functions for dual Artin monoids, Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics, 2015年05月25日~2015年05月29日, Euler International Mathematical Institute, Saint Petersburg, Russia (招待講演)(国際学会)
12. Kyoji Saito, Coherence of direct images of de-Rham complex by open holomorphic maps, Primitive forms, mirror symmetry and related topics, 2014年12月24日~2014年12月26日, Kyoto university, Kyoto (招待講演)(国際学会)
13. Kyoji Saito, The highest weight representation of elliptic and cuspidal Lie algebras, Tsukuba Workshop on Infinite Dimensional Lie Theory and Related Topics -- History and Development, 2014年10月20日~2014年10月23日, Tsukuba university, Tsukuba, Ibaraki (招待講演)(国際学会)
14. Kyoji Saito, Mirror symmetry for primitive forms, The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities of the CNRS-JSPS-VAST, Sapporo, Japan 2014年08月25日~2014年08月30日, Hokkaido university, Sapporo, Hokkaido (招待講演)(国際学会)
15. Kyoji Saito, Higher residue pairings, 非可換代数幾何学とその周辺, 2013年07月01日, 数理解析研究所, 京都 (招待講演)(国際学会)
16. Kyoji Saito, Primitive forms for elliptic integrals and adjoint quotient morphism, Workshop on LG B-model, 2014年03月10日, Michigan 大学, 米国 (招待講演)(国際学会)
17. Kyoji Saito, Monoid of integral square matrices and Euler product of its skew growth function, 離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー, 2014年01月20日, 数理解析研究所, 京都 (招待講演)(国際学会)

18. Kyoji Saito, Mirror symmetry for primitive forms, International Symposium "Rikkyo MathPhys 2014" 2014年01月12日, 立教大学 (招待講演)(国際学会)

19. Kyoji Saito, Mirror symmetry for 14 exceptional unimodular singularities, ミラー対称性の展望 2013年12月25日, 数理解析研究所, 京都 (招待講演)(国際学会)

20. 斎藤恭司, Artin monoids and Eilenberg-MacLane space, Geometric Group Theory 2013年07月16日, 数理解析研究所, 京都 (招待講演)(国際学会)

21. Kyoji Saito, 4 lectures on primitive forms, 2013年06月16日~2013年06月29日, HSE, Steklov Institute, Russia (招待講演)(国際学会)

〔図書〕(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名：高橋篤史

ローマ字氏名：Takahashi, Atsushi

所属研究機関名：大阪大学

部局名：理学(系)研究科

職名：准教授

研究者番号(8桁)：50314290

研究分担者氏名：柏原正樹

ローマ字氏名：Kashiwara, Masaki

所属研究機関名：京都大学

部局名：数理解析研究所

職名：研究員

研究者番号(8桁)：60027381

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：近藤 智

ローマ字氏名：Kondou, Satoshi

研究協力者氏名：Si Li

ローマ字氏名：Si Li

研究協力者氏名：Changzeng Li

ローマ字氏名：Changzeng Li

研究協力者氏名：Todor Milanov

ローマ字氏名：Todor Milanov

研究協力者氏名：庵原 謙治

ローマ字氏名：Iohara, Kenji

研究協力者氏名：石部 正

ローマ字氏名：Ishibe Tadashi