

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25247006

研究課題名(和文)無限次元表現の大域解析

研究課題名(英文)Infinite dimensional representations and global analysis

研究代表者

小林 俊行(Kobayashi, Toshiyuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：80201490

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 32,100,000円

研究成果の概要(和文)：「関数空間が群の表現論によって掌握できるか？」という問題を重複度の観点から定式化し決定的な解答を与えた。すなわち、等質空間上の正則表現が含む既約表現の重複度の有限性および一様有界性を特徴づける幾何学的性質を発見し論証した。さらに、無限次元における「対称性の破れ」を数学的に記述する「分岐則」の研究を推し進めた。特に、上記の判定条件を応用し、分岐則の重複度が常に有限となる対称対の分類理論を確立し、この枠組で、「対称性破れ作用素の構成と分類」という問題提起を行い、その最初の完全な結果を、共形幾何のモデル空間で与え、分岐則の理論の未知の領域を開拓した。

研究成果の概要(英文)：For manifolds with action of reductive group G , we proved a geometric criterion for the multiplicity of irreducible representations to be finite (also to be bounded) in the regular representation of X . In turn, we gave a criterion for reductive symmetric pair (G,H) such that branching laws of irreducible decomposition of G to H have finite multiplicities, and accomplished the classification theory. In this framework, we initiated a systematic study of symmetry breaking operators, and gave the first complete classification results in the setting motivated from conformal geometry. We also constructed eigenfunctions on locally non-Riemannian symmetric spaces whose eigenvalues are stable under local deformation of discontinuous groups.

研究分野：解析学

キーワード：解析学 幾何学 表現論 リー群 分岐則 不連続群

1. 研究開始当初の背景

(1) 群多様体や半単純対称空間における解析は 1950 年代の Harish-Chandra や Gelfand による研究以来、長い歴史をもつが、それを広げたクラスについては未開拓であった。

(2) 多様体 X に群 G の幾何的な作用が存在しない場合でも、 X 上の関数空間には群作用が定義されることがある。この隠れた対称性を活用し、「極小表現をモチーフとする大域解析」の重要性を研究代表者は提唱し、内外の協力者と協同して理論を推進していた。

(3) 簡約リー群の無限次元表現の制限に関する分岐則が無限あるいは有限重複度を持つ例は知られていたが、その理論的背景および分類理論は未開拓であった。また、微分作用素以外の対称性破れ作用素は発見されていなかった。

(4) リーマン幾何の枠組みを越えたる不連続群の理論は、1980 年代の後半に、研究代表者によって本格的な研究が始まり、不連続性の判定条件が解明され、コンパクトな局所擬リーマン対称空間の構成やその変形理論が発展してきている。一方、不連続性を量的に評価する理論や、局所擬リーマン対称空間上の大域解析は未知の領域であった。

2. 研究の目的

幾何的な対称性は、その上の関数空間の対称性に反映される。関数空間が無次元表現論によって十分掌握できるための幾何的条件を解明することを第一の目的とする。

対称性の破れ(表現の制限)を理解することは、表現の理論の最も主要な問題の一つである。本研究は無次元表現の解析的手法による分岐則の研究手法そのものをも開発し、表現論、不連続群論、実解析、微分方程式、微分幾何にまたがる基礎理論の構築を行うことを第二の目的とする。

3. 研究の方法

簡約リー群の等質空間上の正則表現における重複度の有限性の幾何的特徴づけについては、大島利雄氏と共同研究を行った。

幾何的群論を用いた緩増加性の特徴づけに関しては Benoist 教授と共同研究を行った。

極小表現の大域解析に関しては、Hilgert 教授、Mollers 博士と協力し、その保形型式への応用は Savin 教授と共同で研究を行った。

分岐則の全体構想、および、手法の開発は研究代表者の小林が単独で行った。具体的な設定における応用に関しては、複素幾何では Pevzner 教授と共同で行い、また、共形幾何やより一般の放物幾何ではチェコ・デンマークの研究者との共同研究を行った。一方、積分対称性破れ作用素に関しては、数論への応用を見込んで Speh 教授と共同で研究した。

さらに、無限次元の分岐則において有限重複度、離散分解を与える対称対の分類は研究

代表者の判定条件を用いて、それぞれ、松木敏彦教授、大島芳樹氏と協同して行った。

擬リーマン局所対称空間におけるスペクトル解析に関しては、研究代表者が全体構想を立て手法を開発し、不連続群の変形に関する部分は Kassel 博士と共同で研究を行った。

4. 研究成果

(1) 【群作用をもつ多様体上の大域解析と無限次元表現】簡約リー群が作用する多様体上の大域解析に関して、表現論の観点から以下の 2 つの新しい基礎理論を構築した。

(1-A) $C^*(X)$ に現れる既約表現の重複度

(1-B) ユニタリ表現 $L^2(X)$ の既約分解の台

(1-A) 「 X に推移的に作用しているとき、 X の関数空間は群 G の表現論によって十分掌握できるか?」という基本問題を「既約表現の重複度」という観点から定式化し、決定的な解決を与えた。すなわち、簡約リー群 G の等質ベクトル束の切断の空間において、群 G の任意の既約表現の重複度が有限になるための必要十分条件は底空間 X が実球多様体となることであり、これらの重複度が一様有界になるための必要十分条件は X の複素化が球多様体であることを発見し、論証した(大島利雄氏と共同[18])。

(1-B) 簡約型等質空間 X 上の二乗可積分関数の空間に実現されたユニタリ表現が、検証可能な必要十分条件を得た(Benoist と共同)。

(2) 【極小表現の大域解析】

(2-A) 極小冪零軌道のラグランジュ部分多様体上の二乗可積分関数のなすヒルベルト空間に極小表現を構成した。この論文[16]に対して 2015 年度 JMSJ 論文賞が授与された。

(2-B) 極小表現による隠れた対称性から、4 階の常微分方程式をみたす特殊関数が自然に得られる。この新しい特殊関数論と極小表現に関して、最新の知見をまとめた(アメリカ数学会、Frenkel 還暦記念号)。

(2-C) 極小表現のシュレーディンガーモデルの応用として、global な重複度 1 定理を Savin と共同で証明した(文献 [9])。

(3) 【表現の分岐則】研究代表者は、簡約群の無限次元表現の分岐則の研究に関する新しい研究プログラムを提唱した。これは、定性的な分岐則の研究から、構成的な分岐則の研究に移行する重要性を喚起するもので、そのための基礎理論(3-A, B)と手法の開発(3-C)を含む。この構想の概要は、Vogan 教授(アメリカ数学会会長)の還暦集会での招待講演、および、日本数学会の 70 周年の記念講演で発表した(単著論文[7])。群の既約表現から、部分群の既約表現への絡作用素を対称性破れ作用素と名付け、その構成問題を主唱し、具体的な幾何的設定で対称性破れ作用素の構成を実行した((3-C), (3-D))。

(3-A) (分岐則の有限重複度)研究代表者の小林は、簡約リー群 G の任意の既約表現から簡約部分群 H の任意の既約表現への対称性破れ作用素の次元が有限になるための幾何的

判定条件を与えた(論文[12])。さらに、より強い条件として、この次元が有界になるための必要十分条件も証明した。前者は実形 (G, H) に依存するのに対し、後者の条件は複素化 (G_c, H_c) のみによって記述されるという発見も含む。さらに、上記の判定法に基づき、分岐則の有限性を与えるような半単純対称対 (G, H) を松木氏と完全に決定し、分類を与えた(論文 [13], Dynkin 90 歳記念号)。

(3-B) (離散的な分岐則の分類理論) 既約な無限次元表現を部分群に制限したときに、いつ離散的に分解するかの判定条件(小林, Invent 94, Ann Math 98, Invent 98)を用いて、分類理論を推し進めた[10]。

(3-C) 【F メソッド】研究代表者は極小表現のシュレーディンガー模型にヒントを得て、Verma 加群に対するある種の代数的フーリエ変換を定義し、対称性破れ作用素(SBO)を特徴づける高階の微分方程式系を導入した。この微分方程式系と不変式論を組み合わせることによって、同変微分作用素の具体形を決定する手法(F メソッド)を開発した(単著論文)。その基礎理論と応用は総計 400 ページを超す論文として出版した。適用した幾何は、複素幾何、共形幾何、あるいはより一般の放物幾何のモデル空間などであり、それぞれにおいて新しい SBO を構成した。

(3-D) アメリカ数学会のメモワールとして Speth 教授と出版した長編の論文で、無限次元表現の対称性の破れ作用素の完全な分類定理の最初の成功例を与え、さらに、局所 Gross-Prasad 予想に応用した。

(5) 【局所擬リーマン対称空間の大域解析】研究代表者は長年のモチーフである「リーマン幾何学の枠組を越えた不連続群論」から生まれた幾何を舞台に大域解析を試みた。

(5-A) 【安定スペクトラムの構成】コンパクトな 3 次元の反ドジッター多様体においては、局所幾何構造の変形で動かないスペクトラムが無数個存在することを構成的に証明し、さらに高次元の擬リーマン局所対称空間にこの結果を拡張した。Kassel 博士との 100 頁を超える論文[5]では固有不連続性を量的に評価する sharpness という概念を導入し、超局所解析と不連続群の sharpness 評価を組み合わせ、基礎理論の第一歩を与えた。

(5-B) 【動くスペクトラム】幾何構造の変形で動くスペクトラムの存在に関して、隠れた対称性を用いる手法を提唱した(論文 [2])。

(5) 【実解析】Riesz 変換を、それが内包する対称性から復元できるかという問題を、4 を法とする次元の条件で解決した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 38 件)

[1] T. Kobayashi, B. Speth, Symmetry breaking for orthogonal groups and a

conjecture by B. Gross and D. Prasad, Proceedings of the Simons Symposium, 査読有、2018, in press

[2] T. Kobayashi, Global Analysis by Hidden Symmetry, Progress in Mathematics, 査読有、323 巻、2017、359-397

DOI: 10.1007/978-3-319-59728-7_13

[3] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. I. General theory and F-method, Selecta Mathematica (N.S.), 査読有、22 巻、2016、801-845

DOI: 10.1007/s00029-015-0207-9.

[4] T. Kobayashi, M. Pevzner, Differential symmetry breaking operators. II. Rankin-Cohen operators for symmetric pairs, Selecta Mathematica (N.S.), 査読有、22 巻、2016、847-911

DOI: 10.1007/s00029-015-0208-8

[5] F. Kassel, T. Kobayashi, Poincare series for non-Riemannian locally symmetric spaces, Advances in Mathematics, 査読有、287 巻、2016、123-236

DOI: 10.1007/s00029-015-0208-8

[6] T. Kobayashi, A. Nilsson, F. Sato, Maximal semigroup symmetry and discrete Riesz transforms, Journal of the Australian Mathematical Society, 査読有、100 巻、2016、216-240

DOI: 10.1017/S144678871500049X

[7] T. Kobayashi, A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups, Progress in Mathematics, 査読有、312 巻、2015、277-322

DOI: 10.1007/978-3-319-23443-4_10

[8] T. Kobayashi, B. Orsted, P. Somberg, V. Soucek, Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I., Advances in Mathematics, 査読有、285 巻、2015、1796-1852

DOI: 10.1016/j.aim.2015.08.020

[9] T. Kobayashi, G. Savin, Global uniqueness of small representations, Mathematische Zeitschrift, 査読有、281 巻、2015、215-239

DOI: 10.1007/s00209-015-1481-0

[10] T. Kobayashi, Y. Oshima, Classification of symmetric pairs with discretely decomposable restrictions of (g, K) -modules, J. Reine Angew. Math., 査読有、703 巻、2015、201-223

DOI: 10.1515/crelle-2013-0045

[11] Y. Benoist, T. Kobayashi, Tempered reductive homogeneous spaces, Journal of the European Mathematical Society (JEMS), 査読有、17 巻、2015、3015-3036

DOI: 10.4171/JEMS/578

- [12] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, *Developments in Mathematics*, Springer, 査読有、37 卷、2014、127–159

DOI: 10.1007/978-3-319-09934-7_5

- [13] T. Kobayashi, T. Matsuki, Classification of finite multiplicity symmetric pairs, *Transformation Groups*, 査読有、19 卷、2014、457–493
DOI: 10.1007/s00031-014-9265-x

- [14] T. Kobayashi, F-method for symmetry breaking operators, *Differential Geometry and its Applications*, 査読有、33 卷、2014、272–289

DOI: 10.1016/j.difgeo.2013.10.003

- [15] T. Kobayashi, Special functions in minimal representations, *Contemporary Mathematics*, Amer. Math. Soc., 査読有、610 卷、2014、258–266

DOI: 10.1090/conm/610/12103

- [16] J. Hilgert, T. Kobayashi, J. Moellers, Minimal representations via Bessel operators, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有、66 卷、2014、349–414

DOI: 10.2969/jmsj/06620349

- [17] T. Kobayashi, F-method for constructing equivariant differential operators, *Contemporary Mathematics*, Amer. Math. Soc., 査読有、598 卷、2013、141–148

DOI: 10.1090/conm/598/11998

- [18] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, *Adv. Math.*, 査読有、248 卷、2013、921–944

DOI: 10.1016/j.aim.2013.07.015

[学会発表](計 55 件)

- [1] T. Kobayashi, Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces with Indefinite-metric - after 145 years of Klein's Erlangen Program, *Colloquium. Universitat Erlangen-Nurnberg* (招待講演) 2017, Erlangen, Germany

- [2] T. Kobayashi, Conformally Covariant Symmetry Breaking Operators on Differential Forms and Some Applications, *Workshop on Geometric Methods in Physics* (招待講演)(国際学会) 2017, Bialowieza, Poland

- [3] T. Kobayashi, Symmetry Breaking Operators in Conformal Geometry and Some Applications, *Sophus Lie Seminar* (招待講演)(国際学会) 2017 年、Gottingen, Germany

- [4] T. Kobayashi, Analysis of minimal representations-an approach to quantize nilpotent orbits、

Representation Theory at the Crossroads of Modern Mathematics: in honor of Kirillov (招待講演)(国際学会) 2017 年、Reims, France

- [5] T. Kobayashi, Symmetry Breaking Operators for Orthogonal Groups $O(n, 1)$. Harmonic Analysis and the Trace Formula, Harmonic Analysis and the Trace Formula. (招待講演)(国際学会) 2017 年、Oberwolfach, Germany

- [6] T. Kobayashi, “Universal sounds” of anti-de Sitter manifolds, *The Kemeny Lectures* (招待講演) 2017, Dartmouth College, USA

- [7] T. Kobayashi, Conformally Covariant Symmetry Breaking Operators on Differential Forms and Some Applications, *American Mathematical Society* (招待講演)(国際学会) 2017 年、Atlanta, USA

- [8] T. Kobayashi, Birth of New Branching Problems, *日本数学会 70 周年記念企画特別講演* (招待講演) 2016、関西大学(大阪府), Japan

- [9] T. Kobayashi, Conformally Covariant Symmetry Breaking Operators on Differential Forms and Some Applications, *Conference on Geometry, Representation Theory and the Baum-Connes Conjecture* (招待講演)(国際学会) 2016、Tronto, Canada

- [10] T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces with Indefinite-metric, *Analysis on Manifolds with Symmetries and Related Structures* (招待講演)(国際学会) 2016 年、Bath, United Kingdom

- [11] T. Kobayashi, Branching Problems and Symmetry Breaking Operators, *Theorie des Représentations et Analyse Harmonique* (招待講演)(国際学会) 2016、Metz, France

- [12] T. Kobayashi, Symmetry breaking operators for real reductive groups, *New Developments in Representation Theory* (招待講演)(国際学会) 2016 年、INS, Singapore

- [13] T. Kobayashi, Analysis on Non-Riemannian Locally Symmetric Spaces-An Application of Invariant Theory, *Seminar, Institute Elie Cartan de Lorraine* (招待講演)(国際学会) 2015、Nancy, France

- [14] T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces with Indefinite-metric, *The 11th International Workshop: Lie Theory and Its Applications in Physics* (招待講演)(国際学会) 2015、Bulgaria

- [15] T. Kobayashi, Analysis on

- Non-Riemannian Locally Symmetric Spaces-An Application of Invariant Theory, Workshop in honour of R. Howe celebrating his 70th birthday (招待講演 X 国際学会) Yale University, USA
- [16] T. Kobayashi, Symmetry Breaking Operators for Rank One Orthogonal Groups, Analysis, Geometry and Representations on Lie Groups and Homogeneous Spaces (招待講演) 2014, Marrakech, Morocco
- [17] T. Kobayashi, Symmetry Breaking Operators and Branching Problems, Algebraic Geometry Seminar, Zurich University (招待講演), 2014, Switzerland
- [18] T. Kobayashi, Visible Actions and Multiplicity-free Representations, International Conference on Geometry, Integrability and Quantization. (招待講演) 2014, Varna, Bulgaria
- [19] T. Kobayashi, Branching problems of representations of real reductive Lie groups, Representations of reductive groups: A conference dedicated to David Vogan on his 60th birthday (招待講演) 2014, MIT, USA
- [20] T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally pseudo-Riemannian Symmetric Spaces, Sophus Lie Days (招待講演) 2013, Cornell University, USA
- [21] T. Kobayashi, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal group, Workshop on Representations of Lie Groups and their Subgroups (招待講演) 2013, Chalmers Univ. of Technology, Sweden
- [22] T. Kobayashi, Analysis of Minimal Representations (7 lectures), Hypergeometric functions and representation theory (招待講演) 2013, International summer research school of CIMPA, Mongolia
- [23] T. Kobayashi, Multiplicities in the Restriction and Real Spherical Varieties, Representations of Reductive Groups (招待講演) 2013, Salt Lake City, USA
- [24] T. Kobayashi, Global Geometry and Analysis on Locally Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces, Colloquium de Mathematiques de Rennes (招待講演) 2013, Institut de Recherche mathematique de Rennes, France
- [25] T. Kobayashi, Branching, Multiplicities, and Real Spherical Varieties, Group Actions with applications in Geometry and Analysis: in honour of Toshiyuki Kobayashi 50th birthday (招待講演)

2013, Reims, France

〔図書〕(計2件)

- [1] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, Springer-Nature, Conformal Symmetry Breaking Operators for Differential Forms on Spheres, 2016, 201 pages
- [2] T. Kobayashi, B. Speh, American Mathematical Society, Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups, 2015, 118 pages

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/j-in dex.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 俊行 (KOBAYASHI TOSHIYUKI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 80201490

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

大島 利雄 (OSHIMA TOSHIO)

城西大学・理学部数学科・教授

研究者番号: 50011721

松木 敏彦 (MATSUKI TOSHIHIKO)

龍谷大学・文学部・教授

研究者番号: 20157283

河野 俊丈 (KOHNO TOSHITAKE)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 80144111

落合 啓之 (OCHIAI HIROYUKI)

九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・教授

研究者番号: 90214163

平地 健吾 (HIRACHI KENGO)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 60218790

関口 英子 (SEKIGUCHI HIDEKO)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号: 50281134

笹木 集夢 (SASAKI ATSUMU)

東海大学・理学部数学科・准教授

研究者番号: 60514453