

令和元年5月20日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25280004

研究課題名(和文) 劣モジュラ的な離散構造に注目した最適化基礎理論の展開と高速アルゴリズム開発

研究課題名(英文) Developments of discrete optimization theory and efficient algorithms based on submodular structures

研究代表者

藤重 悟 (Fujishige, Satoru)

京都大学・数理解析研究所・特任教授

研究者番号：10092321

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,400,000円

研究成果の概要(和文)：劣モジュラ的な離散構造に基づいて、離散最適化・組合せ最適化の理論とアルゴリズムの基礎研究を展開し、多くの研究成果を上げている。中でも、劣モジュラ構造を基礎とする離散凸関数の新たな理論を構築し、最近世界で注目される劣モジュラ的な関数(新たに導入した横断劣モジュラ関数、歪双劣モジュラ関数等)に関連する最大・最小定理を始め、離散最適化・組合せ最適化の理論と効率的アルゴリズムの基礎となる離散構造を解明した。さらに、非分割財の経済やゲーム論的配分の問題における劣モジュラ構造の有用性を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

大規模な離散最適化・組合せ最適化問題を厳密に、あるいは、近似的に解くための効率的アルゴリズムの構築に向けて、劣モジュラ的な離散構造の有用性を明らかにした。学術的な意義としては、離散最適化・組合せ最適化の理論と効率的アルゴリズムの基礎となる、離散凸関数の新たな理論構築や、新たな劣モジュラ的な関数に関連する最大・最小定理の導出等であり、社会的意義としては、非分割財の経済やゲーム論的配分の問題における劣モジュラ構造の有用性の解明等である。

研究成果の概要(英文)：From the view points of the discrete structures associated with submodularity, we have investigated the theory and algorithms for discrete and combinatorial optimization problems which has been drawing researchers' attention in the world. We have developed a new theory of discrete convex functions, based on submodular structures, and effectively applied the theory to combinatorial and discrete optimization problems. We have also examined a general class of submodular-like discrete structures such as transversal-submodular functions and skew-bisubmodular functions. We then have shown fundamental min-max theorems for such discrete systems and investigated discrete algorithmic structures. We have also shown that the submodular structures play crucial roles in economy with indivisible commodities and a class of allocation problems in gaming situations.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：離散最適化 組合せ最適化 劣モジュラ関数 離散アルゴリズム

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

機械学習をはじめとして、劣モジュラ構造を有する大規模複雑な最適化の研究が盛んに行われており、理論とアルゴリズムの両面から世界をリードする劣モジュラ構造に基づく更なる研究が必要である。

### 2. 研究の目的

劣モジュラ的な離散構造に注目した離散最適化の基礎理論の展開とアルゴリズム開発により、急速に広がってきた関連分野の未解決問題の解決を目指す。

### 3. 研究の方法

劣モジュラ的な離散構造の理論の精緻化と深化により、劣モジュラ的な離散構造を有する最適化諸問題に対する理論とアルゴリズムを体系的に構築し、理論展開する。

### 4. 研究成果

各年度の研究成果は、以下の通りである。

[2013年度]

1. 要素数制約付き多面体の族の有する双対一致性の概念を導入し、そのような多面体族の凸包の線形不等式表現を確定させた。

2. 無向グラフにおけるブロードキャストゲームにおける最小ポテンシャルをもつナッシュ均衡解の社会コストの性質を調べた。具体的には、最小ポテンシャルをもつナッシュ均衡解の社会コストと最適な社会コストの比に関して、非自明な上限、下限値を与えた。

3. グラフ上での離散凸関数の理論構築を試みて、その新たな知見に基づき、多品種流や施設配置問題への応用を行った。

4. Huber-Krokhin-Powell (2013) によって提案された skew-bisubmodular 関数の一般化を提案し、一般化 skew-bisubmodular 関数と一般矩形上の凸拡張の関係を明らかにした。また、skew-bisubmodular 関数から自然に定まる多面体を導入し、その上での最小ノルム点と関数の最小値の関係を示す最大最小定理を導いた。

5. 巡回セールスマン問題の緩和問題である、特定の枝カットと交わる2-因子問題に対して、3正則グラフでのアルゴリズムを構築した。さらに、やはり巡回セールスマン問題の緩和問題である最小2辺連結部分グラフ問題に対して3正則3辺連結グラフにおける近似アルゴリズムを設計した。

[2014年度]

1. 劣モジュラ的な離散構造を有する新たな関数系として横断劣モジュラ関数の概念を導入し、横断劣モジュラ関数最小化問題に対する最大最小定理を示した。さらに、ダイヤモンドの直積束上の劣モジュラ関数やk-劣モジュラ関数などの応用上特に重要な特殊ケースに対し、付随する多面体構造の解析を行った。特に横断劣モジュラ関数の概念によって既存の多くの成果に対する統一的な視点が与えられた。

2. 劣モジュラ的な離散構造に関わる基本的な多面体として双劣モジュラ多面体があり、離散凸関数を定める定義域の単体分割をその単体間の局所的な接続関係を双劣モジュラ的に定めることによって広がる離散凸関数のクラスを示した。

3. ネットワーク合成問題に対する Gomory-Hu のアルゴリズムと半整数性を新しい立場から見直し、あるクラスの歪優モジュラ被覆問題にまでアルゴリズムと半整数性が拡張できることを示した。また、それを応用して、さらに広いクラスに対して近似アルゴリズムを構築した。

4. 2人零和平均利得確率ゲームに対する定常戦略を考察し、与えられた正定数  $d$  に対して、確率ゲームが  $d$ -エルゴード的である場合、 $24d$ -エルゴード的であるような定常戦略を求めるアルゴリズムを構築した。

5. 2部グラフにおける  $\$C_4$ -free 2-マッチングに対して、2部グラフの Dulmage-Mendelsohn 分解や一般グラフの Edmonds-Gallai 分解に対応する分解定理を証明し、その有用性を示した。

[2015年度]

1. 古くから研究されている Congestion ゲームについて、Fotakis (2010) によって示された局所最適な更新の繰り返しで均衡解に高速に収束する現象が、 $M$  凸関数に対する貪欲算法に他ならないことを明らかにした。

2. 数理最適化分野で最も基礎的な線形相補性問題 (LCP) の入出力の疎性に関わる入力行列の行/列毎の非零要素数の最大値や解の非零要素数をパラメータとして扱い、パラメータ化計算量を明らかにした。

3. 歪優モジュラ関数に対する交差解消ゲームは、Red と Blue の2人のプレイヤーからなるゲームで、カット被覆線形計画問題の双対解をラミナー解にする交差解消プロセスを抽象化したものであり、このゲームに対し、Karzanov による0-1値歪優モジュラ関数に対する既存結果を拡張・改良した多項式時間 Red 必勝戦法を与え、その帰結として、広いクラスのカット被覆線形計画の双対解に対する強多項式時間交差解消アルゴリズムを与えた。

4. 劣モジュラ的な離散構造を有する新たな関数系として、Huber-Krokhin-Powell (2013) によって導入された歪双劣モジュラ関数に対する最小化問題は、Huber-Krokhin (2014) によって楕円体法を利用したアルゴリズムが知られていたが、組合せ的アルゴリズムの開発は未解決であっ

た。この問題に対し、Iwata-Fujishige(2005)およびMcCormick-Fujishige(2010)による双劣モジュラ関数最小化アルゴリズムを基礎に、歪双劣モジュラ関数最小化問題に対する組合せ的強多項式時間アルゴリズムの開発を行った。

[2016年度]

1. 最小化ナップサック問題に対して、キャンセル付きオンライン版を扱い、競合比8をもつ決定的オンラインアルゴリズムを開発した。
2. ホーン規則によるアンチマトロイドの新しい表現法を提案し、その表現法のもとでの基本的な問題とそれを解くアルゴリズムを提案した。特にメンバシップ問題やインファレンス問題に対する線形時間アルゴリズムを与えた。
3. 離散凸解析の基礎をなす凸関数は、その定義域である整数格子をグリッドグラフ、ツリーの直積、さらに一般的なグラフにおきかえても自然に定義できることを明らかにした。
4. 制約付き2-マッチングの新たな枠組を提案し、その問題が多項式時間可解となる有用な十分条件を導き、最大最小定理・組合せ的アルゴリズム・分解定理を与えた。
5. Edmondsの有向木詰込み定理の拡張としてBercziとFrankによって提案されたマトロイド制約付き有向木詰込み予想に対し、反例を与え、マトロイド制約が横断表現やグラフ表現を有する場合は、その予想が正しいことを証明した。
6. ネットワークにおける混雑現象のパラドックスとしてBraessパラドックスが良く知られているが、対象のネットワークに付随する制約条件がマトロイド構造を有する場合にはBraessパラドックスが生じないことを明らかにした。
7. 職探しのjob-matching問題において、ランダムに局所改善を繰り返すことにより、確率1で均衡解に到達することを示した。

[2017年度]

1. 歪双劣モジュラ関数の組合せ的多項式時間アルゴリズムを構成した。
2. パラメトリック劣モジュラ関数最小化とそれに付随する符号付きring familyの組合せ構造を明らかにした。
3. 平均利得に対する確率的ゲームにおける均衡解を、凸計画法に基づくアルゴリズムを用いて、確率頂点の数が定数であれば、擬多項式時間で解けることを示した。
4.  $k$ -劣モジュラ関数の最小化元集合のコンパクトな表現法を開発し、いくつかの例において、効率的に構成する多項式時間アルゴリズムを開発した。
5. Birkhoff表現定理を拡張したモジュラ半束のコンパクト表現法を確立し、その上の劣モジュラタイプの関数の最小化元集合の表現に応用した。
6. 2部グラフにおける辺数4の閉路を含まない2-マッチングに対応する関数の最小化集合族の構造を組合せ的に表現し、それに基づく2部グラフの分解定理を与えた。
7. 制約付き2-マッチングの新たな枠組を提案した。本研究により、辺数が5以上の閉路を含まない2-マッチング問題が多項式時間可解となる問題のクラスが初めて得られた。
8. 近年、マトロイド制約付き有向木詰込み、さらにその共通の一般化などが提案されているが、bi-set集合上の交差劣モジュラ関数を利用したマトロイド構成法を提案し、その構成法から有向グラフ上でのグラフ的マトロイドの変種を構成し、そのマトロイドと分割マトロイドの交わりによって有向木へ分割可能な辺集合が特徴づけられることを示した。

[2018年度]

1. 凸多面体上の辞書式最適解ならびに離散凸性に関連して、greedy system of linear inequalitiesという新しい概念を導入し、良く知られるJack Edmondsの貪欲アルゴリズムと同様な手順によって辞書式最適解が得られることを示した。さらに、このようにして得られる辞書式最適解が整数解を与える条件を吟味し、それによって、室田・田村によって示された「整凸関数の劣微分が整数点を含むこと」の別証明を与えた。また、整凸関数の新たな特徴付けも明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 31 件)

1. [S. Fujishige](#) and [J. Massberg](#): Dual consistent systems of linear inequalities and cardinality constrained polytopes, *Mathematical Programming, Ser. B*, 150 (2014) 35-48. 10.1007/s10107-014-0748-2
2. [S. Fujishige](#), [S. Tanigawa](#), and [Y. Yoshida](#): Generalized skew bisubmodularity: A characterization and a min-max theorem, *Discrete Optimization*, 12 (2014) 1-9. 10.1016/j.disopt.2013.12.001
3. [Y. Kawase](#) and [K. Makino](#): Nash equilibria with minimum potential in undirected broadcast games, *Theoretical Computer Science*, 482 (2013) 33-47. 10.1016/j.tcs.2013.02.031
4. [S. Boyd](#), [S. Iwata](#) and [K. Takazawa](#): Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27 (2013) 918-939. 10.1137/110843514

5. K. Takazawa: Optimal matching forests and valuated delta-matroids, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 28 (2014) 445-467.  
10.1137/110827661
6. S. Fujishige and S. Tanigawa: A min-max theorem for transversal submodular functions and its implications, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 28 (2014) 1856-1875,  
10.1137/130936415
7. S. Fujishige: Bisubmodular polyhedra, simplicial divisions, and discrete convexity, *Discrete Optimization*, 12 (2014) 115-120.  
10.1016/j.disopt.2014.02.002
8. T. N. Hau , H. Hirai, and N. Tsuchimura: On half-integrality of network synthesis problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 57 (2014) 63-73.  
[www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e\\_mag/Vol.57\\_02\\_063.pdf](http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/Vol.57_02_063.pdf)
9. S. Fujishige, M. X. Goemans, T. Harks, B. Peis, and R. Zenklusen: Congestion games viewed from M-convexity, *Operations Research Letters*, 43 (2015) 329-333.  
10.1016/j.orl.2015.04.002
10. S. Fujishige, K. Murota, and A. Shioura: Monotonicity in steepest ascent algorithms for polyhedral L-concave functions, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 58 (2015) 184-208.  
10.15807/jorsj.58.184
11. H. Sumita, N. Kakimura, and K. Makino: Parameterized complexity of sparse linear complementarity problems, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, 43 (2015) 355-364.  
10.4230/LIPIcs.IPEC.2015.355
12. H. Hirai: On uncrossing games for skew-supermodular functions, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 59 (2016) 218-223.  
[www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e\\_mag/Vol.59\\_02\\_218.pdf](http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/Vol.59_02_218.pdf)
13. R. Ikeshita and S. Tanigawa: Count matroids of group-labeled graphs, *Combinatorica*, 38 (2018) 1101-1127.  
10.1007/s00493-016-3469-8
14. S. Fujishige, M. X. Goemans, T. Harks, B. Peis, and R. Zenklusen: Matroids Are Immune to Braess' Paradox, *Mathematics of Operations Research*, 42 (2017) 745-761.  
10.1287/moor.2016.0825
15. B. Chen, S. Fujishige, and Z. Yang: Decentralized market processes for stable job matchings with competitive salaries, *Journal of Economic Theory*, 165 (2016) 25-36.  
10.1016/j.jet.2016.04.003
16. X. Han and K. Makino: Online minimization knapsack problem, *Theoretical Computer Science*, 609 (2016) 185-196.  
10.1016/j.tcs.2015.09.021
17. H. Yoshikawa, H. Hirai, and K. Makino: A representation of antimatroids by Horn rules and its application to educational systems. *Journal of Mathematical Psychology*, 77 (2017) 82-93.  
10.1016/j.jmp.2016.09.002
18. Q. Fortier, C. Kiraly, Z. Szigeti, and S. Tanigawa: On packing spanning arborescences with matroid constraint, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 61 (2017) 451-457.  
10.1016/j.endm.2017.06.073
19. K. Takazawa: Finding a maximum 2-matching excluding prescribed cycles in bipartite graphs, *Leibniz International Proceedings in Informatics*, 58 (2016) 87:1-87:14.  
10.4230/LIPIcs.MFCS.2016.87
20. S. Fujishige and Z. Yang: On a spontaneous decentralized market process. *Journal of Mechanism and Institution Design*, 2 (2017) 1-37.  
10.22574/jmid.2017.12.001
21. S. Fujishige, Y. Sano, and P. Zhan: The Random Assignment Problem with Submodular Constraints on Goods, *ACM Transactions on Economics and Computation*, 6 (2018) 1-28.  
10.1145/3175496
22. S. Fujishige and S. Tanigawa: Polynomial combinatorial algorithms for skew-bisubmodular function minimization, *Mathematical Programming, Ser. A*, 171 (2018) 87-114.  
10.1007/s10107-017-1171-2
23. S. Fujishige: Parametric bisubmodular function minimization and its associated signed ring family, *Discrete Applied Mathematics*, 227 (2017) 142-148.  
10.1016/j.dam.2017.04.047
24. E. Boros, K. Elbassioni, V. Gurvich, and K. Makino: A convex programming-based algorithm for mean payoff stochastic games with perfect information, *Optimization Letters*,

- 11 (2017) 1499-1512.  
 10.1007/s11590-017-1140-y
25. H. Hirai and T. Oki: A compact representation for minimizers of  $k$ -submodular functions, *Journal of Combinatorial Optimization*, 36 (2018) 709-741.  
 10.1007/s10878-017-0142-0
26. K. Takazawa: Decomposition theorems for square-free 2-matchings in bipartite graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 233 (2017) 215-223.  
 10.1016/j.dam.2017.07.035
27. K. Takazawa: Finding a maximum 2-matching excluding prescribed cycles in bipartite graphs, *Discrete Optimization*, 26 (2017) 26-40.  
 10.1016/j.disopt.2017.05.003
28. K. Takazawa: Excluded  $t$ -factors in bipartite graphs: A unified framework for nonbipartite matchings and restricted 2-matchings, *Lecture Notes in Computer Science*, 10328 (2017) 430-441.  
 10.1007/978-3-319-59250-3\_35
29. Q. Fortier, C. Kiraly, Z. Szigeti, and S. Tanigawa: On packing spanning arborescences with matroid constraint, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 61 (2017) 451-457.  
 10.1016/j.endm.2017.06.073
30. Z. Szigeti and S. Tanigawa: An algorithm for the problem of minimum weight packing of arborescences with matroid constraints, *Mathematical Programming*, (2019) (to appear).  
 10.1007/s-10107-019-01377-0
31. S. Fujishige: Greedy systems of linear inequalities and lexicographically optimal solutions, *RAIRO - Operations Research*, (2019) (to appear).  
 10.1051/ro/2019001

[学会発表] (計 18 件)

1. S. Fujishige: Bisubmodular polyhedra, simplicial divisions, and discrete convexity, *Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, Veszprem, Hungary, 2013年06月04日 - 2013年06月07日.
2. H. Hirai: Discrete convexity for multiflows and 0-extensions, *Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications(招待講演)*, Veszprem, Hungary, 2013年06月04日 - 2013年06月07日.
3. S. Tanigawa: Generalized skew-bisubmodularity, *The Fourth Cargese Workshop on Combinatorial Optimization*, Corsica, France, 2013年09月30日 - 2013年10月05日
4. K. Takazawa: Shortest bibranchings and valuated matroid intersection, *Combinatorial Geometries: Matroids, Oriented Matroids and Applications*, Marseille, France, 2013年04月02日 - 2013年04月06日
5. K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *18th Combinatorial Optimization Workshop*, Aussois, France, 2014年01月06日 - 2014年01月10日
6. S. Fujishige: A min-max theorem for transversal submodular functions and its implications, *18th Combinatorial Optimization Workshop*, Aussois, France, 2014年01月06日 - 2014年01月10日.
7. S. Fujishige: Congestion games viewed from  $M$ -convexity, *19th Combinatorial Optimization Workshop*, Aussois, France, 2015年01月05日 - 2015年01月09日.
8. H. Hirai: Some combinatorial optimization problems related to metric spaces of nonpositive curvature, *Topics in Differential Geometry and its Discretizations(招待講演)*, 東北大学, 2015年01月10日 - 2015年01月12日.
9. K. Makino: A Potential Reduction Algorithm for Ergodic Two-Person Zero-Sum Limiting Average Payoff Stochastic Games, *8th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, Hawaii, USA, 2014年12月19日 - 2014年12月21日.
10. S. Fujishige and S. Tanigawa: Polynomial combinatorial algorithms for skew-bisubmodular function minimization, *Workshop on Rigidity, Submodularity, and Discrete Convexity(招待講演)(国際学会)*, Bonn, Germany, 2015年10月05日 - 2015年10月09日.
11. S. Tanigawa: Sparsity count on group-labeled graphs for characterizing the infinitesimal rigidity of symmetric frameworks, *Advances in Combinatorial and Geometric Rigidity(招待講演)(国際学会)*, Banff, Canada, 2015年07月12日 - 2015年07月17日.
12. K. Takazawa: Decomposition theorems for square-free 2-matchings in bipartite graphs, *The 41st International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science(国際学会)*, Munich, Germany, 2015年06月17日 - 2015年06月19日.
13. K. Takazawa: Structure theorems for square-free 2-matchings in bipartite graphs, *The 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications(国際学*

会), 九州大学(福岡市, 福岡県), 2015年06月02日 - 2015年06月05日.

14. K. Takazawa: Decomposition theorems for square-free 2-matchings in bipartite graphs, The 22nd International Symposium on Mathematical Programming (国際学会), Pittsburgh, USA, 2015年07月12日 - 2015年07月17日.

15. K. Takazawa: Finding a maximum 2-matching excluding prescribed cycle s in bipartite graphs, 41st International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2016) (国際学会), AGH University (Krakow, Poland), 2016年08月22日 - 2016年08月26日.

16. H. Hirai and S. Nakashima: A compact representation for modular semilattices and its applications, 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (国際学会), 2017年.

17. K. Takazawa: Excluded  $t$ -factors in bipartite graphs: A unified framework for nonbipartite matchings and restricted 2-matchings, The 19th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2017) (国際学会), 2017年.

18. K. Takazawa: Excluded  $t$ -factors in bipartite graphs: A unified framework for nonbipartite matchings and restricted 2-matchings, The 10th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications (JH 2017) (国際学会), 2017年.

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名: 牧野 和久

ローマ字氏名: Makino, Kazuhisa

所属研究機関名: 京都大学

部局名: 数理解析研究所

職名: 教授

研究者番号 (8桁): 60294162

研究分担者氏名: 平井 広志

ローマ字氏名: Hirai, Hiroshi

所属研究機関名: 東京大学

部局名: 大学院情報理工学系研究科

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 20378962

研究分担者氏名: 高澤 兼二郎

ローマ字氏名: Takazawa, Kenjiro

所属研究機関名: 法政大学

部局名: 理工学部

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 10583859

研究分担者氏名: 谷川 眞一

ローマ字氏名: Tanigawa, Shin-ichi

所属研究機関名: 東京大学

部局名: 大学院情報理工学系研究科

職名: 准教授

研究者番号 (8桁): 30623540

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。