

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25287003

研究課題名(和文) シンプレクティック代数幾何

研究課題名(英文) Symplectic Algebraic Geometry

研究代表者

並河 良典 (Namikawa, Yoshinori)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80228080

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,700,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体には特異点がしばしば現れる。その中でもシンプレクティック構造をもつ特異点はシンプレクティック特異点とよばれ、超ケーラー多様体の研究や幾何学的表現論で重要な働きをする。多くの場合、シンプレクティック特異点は1次元代数トーラスの作用をともなって現れる。こうしたものをコニカルシンプレクティック特異点と呼ぶ。本研究ではコニカルシンプレクティック特異点の普遍ポアソン変形とクレパント特異点解消の間係さらにはコニカルシンプレクティック特異点の分類に関する研究をおこなった。ある種の有限性定理、複素半単純リー環のべき零軌道閉包の特徴付けなどが主な成果である。

研究成果の概要(英文)：An algebraic variety often has a singularity. Among them an important role plays a singularity that has a symplectic structure. We call it a symplectic singularity. A symplectic singularity is an important object which is closely related with hyperkahler geometry and geometric representation theory. In most cases a symplectic singularity shows up with a 1-dimensional torus action. Such a singularity is particularly called a conical symplectic singularity. We discovered that there is a close relationship between the universal Poisson deformation of a conical symplectic singularity and the birational geometry of its crepant resolution. We also started classifying conical symplectic singularities. Our main results contain a certain finiteness theorem for symplectic singularities and the characterization of a nilpotent orbit closure of complex semisimple Lie algebra.

研究分野：代数幾何, 複素シンプレクティック幾何

キーワード：シンプレクティック特異点 ポアソン変形 双有理幾何

1. 研究開始当初の背景

複素シンプレクティック特異点は、 $K3$ 曲面上の半安定層モジュライ空間を構成するときに現れたり、幾何学的表現論であつかう代数多様体などに現れるなど、代数幾何のみならずいくつかの分野にまたがって注目を集めている対象である。シンプレクティック特異点は自然なポアソン構造を持つ。数年来の研究によって、conical シンプレクティック特異点およびそのクレパント特異点解消の普遍ポアソン変形の構造が解明されつつあった。とくに conical シンプレクティック特異点がポアソン変形によってスムージング可能なことと、conical シンプレクティック特異点がクレパント特異点解消を持つことが同値であることがわかっており、ポアソン変形と双有理幾何の間に密接な関係があることは明白であった。この時期、シンプレクティック双対性との関連から、何人かの研究者からこの関連性に関して質問されることが多かった。一方、本研究が始まる直前に、複素接触幾何とポアソン変形を用いることにより、複素半単純リー環のべき零錐の代数幾何的な特徴付けを得ることに成功した。

2. 研究の目的

Conical シンプレクティック特異点のポアソン変形と双有理幾何の関係を、何らかの形で定式化すること、またべき零錐の特徴付けをさらに発展させて、別のタイプのシンプレクティック特異点の特徴付け、分類を模索することが目標であった。

3. 研究の方法

Conical シンプレクティック特異点 X がクレパント特異点解消 Y をもつとき、その普遍ポアソン変形の底空間は Y の(複素数係数)第 2 コホモロジー群に一致する。一方、この空間は Y のピカル群に複素数体をテンソルしたものである。このことを利用してポアソン変形と双有理幾何の関係をはっきりとした言葉で定式化する。

いっぽう、conical シンプレクティック特異点から原点を除いて、1 次元代数トーラスの商をとることによって、orbifold 構造をもった特異接触ファノ多様体がえられる。この接触ファノ多様体を研究することで、もとのシンプレクティック多様体の研究に還元する。

4. 研究成果

(i) ポアソン変形と双有理幾何：

Conical シンプレクティック特異点 X とそのクレパント特異点解消 Y を考える。このとき Y の普遍ポアソン変形が $H^2(Y, \mathbb{C})$ 上構成される。 $H^2(Y, \mathbb{C})$ の点で、その上にのっている複素シンプレクティック多様体が

アフライン多様体でないようなもの全体は、有限個の超平面の和集合からなる。これら超平面は、有理数体の上で定義されているので、とくに $H^2(Y, \mathbb{R})$ の中にいくつかの部屋 (chamber) を決める。一方 X のクレパント特異点解消のアンプルコーンを $H^2(Y, \mathbb{R})$ の中のコーンとみなすことができる。 $H^2(Y, \mathbb{R})$ にはある種の Weyl 群 W (有限鏡映群) が作用しており、これらのコーンは W -作用によって互いに交わらないコーンにうつる。こうして得られる沢山のコーンが上で定義した部屋に一致する。

(ii) 有限性定理：

これは、conical シンプレクティック特異点 X の分類に向けた第 1 ステップである。 X をアフライン多様体とみて、その座標環の極小斉次生成系を考える。この生成系の次数の最大値のことを極大ウエイトと呼ぶ。次元と極大ウエイトを固定すると、そのような conical シンプレクティック特異点は有限個しかない。研究方法でのべたように X には orbifold 構造をもった特異接触ファノ多様体が対応する。このようなファノ多様体の有界性定理 (Hacon-McKernan-Xu) が鍵になる。

(iii) べき零軌道閉包の特徴付け：

極大ウエイトが 1 であるような conical シンプレクティック多様体は、複素半単純環のべき零軌道 (nilpotent orbit) の閉包に他ならない。さらに極大ウエイトが 1 で完全交差特異点をもつものが、べき零錐 (nilpotent cone) に対応する。この結果は、conical シンプレクティック特異点 X の分類に向けた第 2 ステップとみなせる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

[1] Namikawa, Y.: Birational geometry for nilpotent orbits, Advanced Lectures in Mathematics, 26 (2013) 1-38 査読有

[2] Namikawa, Y.: Equivalence of symplectic varieties, Kyoto Journal of Math. 53 (2013) 483-514, 査読有
DOI : 10.1215/21562261-2081270

[3] Namikawa, Y.: On the structure of homogeneous symplectic varieties of

complete intersection, Invent. Math. 193,
(2013) 159-185 査読有
DOI : 10.1007/s00222-012-0424-1

[4] Namikawa, Y.: Poisson deformations
and birational geometry, J. Math. Sci.
Univ. Tokyo 22, 小平 100 周年記念号
(2015) 339-359
査読有

[5] Namikawa, Y. : Fundamental groups
of symplectic singularities, to appear in
Adv. Stud Pure Math. 74 (2017)
321-336,

[6].Lehn, M., Namikawa, Y., Sorger, C.
D. van Straten : On symplectic
hypersurfaces, Adv. Stud. Pure Math. 70,
(2016) 277-298 査読有

[7] Namikawa, Y. : A finiteness theorem
on symplectic singularities, Compositio
Math. 152 (2016), 1225-1236 査読有
doi:10.1112/S0010437X16007387

〔学会発表〕(計 17 件)

[1] Namikawa, Y.: Poisson deformations
and Mori dream spaces
学会等名 : Pacific Rim Conference 2013
発表年月日 : 6, August, 2013
発表場所 : Dalian, China
講演の種類 : 招待

[2] Namikawa, Y.: Poisson deformations
and Mori dream spaces
学会等名 : Classifications of algebraic
varieties and related topics
発表年月日 : 12, September, 2013

発表場所 : Cetraro, Italy
講演の種類 : 招待

[3] Namikawa, Y.: Symplectic varieties of
complete intersection and contact
geometry,
学会等名 : Algebraic Geometry in East
Asia,
発表年月日 : 15, October, 2013
発表場所 : Beijing, China
講演の種類 : 招待

[4] Namikawa, Y.: A characterization of
the nilpotent cones of complex
semisimple Lie algebras
学会等名 : Symposium on projective
algebraic varieties and moduli
発表年月日 : 12, Feb. 2014
発表場所 : Seoul, Korea
講演の種類 : 招待

[5] Namikawa, Y., A characterization of
nilpotent varieties of complex
semisimple Lie algebras I, II, III, IV
学会等名 : Lecture Series,
発表年月日: April 29, 30, and May 1
of 2014,
発表場所 KAIST, Daejeon, Korea
講演の種類 : 招待

[6] 並河 良典 : べき零多様体の代数幾何
学的特徴づけ
京都大学談話会, 7, May 2014, 京都大学
講演の種類 : 招待

[7] Namikawa, Y.: Poisson deformations
and birational geometry,
学会等名 : Workshop on Algebraic
Geometry,
発表年月日 May 20, 2014,

発表場所: Sichuan Univ., China

講演の種類: 招待

[8] Namikawa, Y.: A characterization of nilpotent varieties of complex semisimple Lie algebras,

学会等名: Workshop "Complex geometry and Lie groups",

発表年月日: June 19, 2014,

発表場所: Univ. of Torino, Italy

講演の種類: 招待

[9] 並河 良典: べき零多様体の代数幾何学的特徴つけ

学会等名: 表現論シンポジウム,

発表年月日: 27, Nov. 2014,

発表場所: 夢海遊淡路島, 兵庫県, 洲本市

講演の種類: 招待

[10] Namikawa, Y.: A finiteness theorem for symplectic singularities,

学会等名: Representation theory and geometry of symplectic resolutions,

発表年月日: May 20, 2015

発表場所: Northeastern University, Boston, USA

講演の種類: 招待

[11] Namikawa, Y.: A finiteness theorem for symplectic singularities,

学会等名: Algebraic Geometry 2015, AMS summer institute,

発表日時: July 14, 2015

発表場所: University of Utah, Salt Lake City, USA

講演の種類: 招待

[12] Namikawa, Y.: A finiteness theorem for symplectic singularities,

学会等名: New techniques in geometric

invariant theory,

発表年月日: 1. September 2015,

発表場所: Freie Univ. Berlin, Germany

講演の種類: 招待

[13] Namikawa, Y.: A finiteness theorem for symplectic singularities,

学会等名: 21-th Symposium on complex geometry,

発表年月日: Oct. 29, 2015,

発表場所: 金沢大学サテライトプラザ

講演の種類: 招待

[14] Namikawa, Y.: A characterization of nilpotent cones of complex semisimple Lie algebras,

学会等名: Higher dimensional algebraic geometry and around, Kobe-Kyoto,

発表日時: Feb. 3, 2016,

発表場所: 神戸大学

講演の種類: 招待

[15] Namikawa, Y. : A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities,

学会等名: On explicit description of holomorphic symplectic varieties,

発表年月日: 2016年9月1日,

発表場所: Onuma International Seminar House, Japan,

講演の種類: 招待

[16] Namikawa, Y. : A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities,

学会等名: Singularities,

発表日時: 2016年9月27日,

発表場所: Oberwolfach Math Inst. Germany,

講演の種類: 招待

研究者番号：

[17] Namikawa, Y. : A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities,
学会等名：Algebraic Geometry and Integrable system,
発表年月日：2016年12月6日,
発表場所：Kobe University, Japan,
講演の種類：招待

(4)研究協力者 ()

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

並河良典 (Namikawa Yoshinori)
京都大学大学院理学研究科教授
研究者番号：80228080

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()