

令和元年6月14日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25287007

研究課題名(和文) 圏論的有限次元性

研究課題名(英文) Categorical Finite Dimensionality

研究代表者

木村 俊一 (Kimura, Shun-ichi)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：10284150

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,800,000円

研究成果の概要(和文)：例えば円という図形は「 x の2乗と y の2乗の和が1」という数式であらわされるが、 0 = 「偶数」と 1 = 「奇数」という数2つだけの世界でも、(偶数、奇数)と(奇数、偶数)の2点が同じ数式であらわされる「図形」となり「似た」性質を持つ。実は円の「神様」(モチーフ)があって、その影だから似た性質なのだろう、というのがモチーフ理論である。本研究ではモチーフそのものが「有限次元性」(あまり大きすぎず、計算可能)だと予想して、その証明に取り組んだが、Ayoubによりモチーフの有限次元性が証明された。これによりモチーフの大問題がいくつも解決し、理論は大きく進展した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

図形をあらわす方程式を別の「数」で考えて図形の情報を引き出す、というアイデアは1950年台のWeilによるもので、そのアイデアに触発されて20世紀後半にエタールコホモロジーを含む代数幾何及び数論幾何の大きな進展があった。しかしその証明は、方程式(=モチーフ、図形の神様)の本体ではなく別の影(別の数での図形情報)を詳しくみるもので、モチーフ本体はもっと複雑かもしれなかった。今回モチーフの有限次元性が証明されたことで、モチーフ本体の複雑さ(次元)はコホモロジーの複雑さ(次元)と同じであることがわかり、今後様々な問題がコホモロジーの計算に帰着されることになるはずである。

研究成果の概要(英文)：A circle can be described by the equation " x squared plus y squared equals 1". When we use only two numbers, namely 0 = "even numbers" and 1 = "odd numbers", then the set of two points {(even, odd), (odd, even)} is a "shape" described by the same equation, and behaves "like" a circle. Motif theory explains this phenomenon as follows: There is the Ideal Circle (motif of a circle) and the real circle, and the two points as above, are the shadows of the same ideal circle, hence behave similarly. In this research project, we try to prove the conjecture that the Ideal Algebraic Varieties (Motives of algebraic varieties) are finite dimensional (Not too large, and hence computable). As a result Joseph Ayoub proved the finite dimensionality, solving many big problems of motif theory.

研究分野：代数幾何

キーワード：モチーフ K環 有限次元性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

モチーフの有限次元性予想は、モチーフ理論の鍵となる予想の1つであり、研究代表者が1995年のサンタクルーズ代数幾何シンポジウムで研究代表者が口頭発表したのが始まりである。例えば Spencer Bloch が1975年に、幾何種数0の代数曲面の Chow 群の Albanese Kernel が消えることを予想し、その後ずっと未解決であったが、モチーフの有限次元性が成り立てば、この Bloch 予想の遥かな一般化、すなわちサイクルマップが全射ならば単射であろう、という予想も成り立つことになる。すなわち、モチーフの有限次元性は、Bloch がその類稀なる計算能力によって事例から見出した予想を概念的に説明する予想だったのである。しかしその後約20年に渡って本質的な進展はなく、本研究課題申請時には派生的な問題についての課題も多く提案していた。例えばその一つとして、モチビク Chow 級数の有理性がある。モチーフの有限次元性とモチビクゼータの有理性とは、同値ではないが深く関係があることが有限次元性の研究開始当初から Yves Andre や Bruno Kahn らによって指摘されていたが、モチビクゼータとは与えられた代数多様体の対称積 (= 0次元 Chow 多様体) の形式和であり、それを d次元 Chow 多様体の形式和としても有理的か、という問題がモチビク Chow 級数の有理性である。一般の代数多様体に対しては答は NO であり、それどころか射影平面のようなモチーフの視点からは超単純な図形に対しても答が NO であることが、研究代表者と Javier Elizondo との共同研究によりわかっていた。ところが一方、単に d次元 Chow 多様体の形式和のモチーフそのものを考えるのではなく、Homotopy Equivalence (つまり X とアフィン直線との直積のモチーフを X のモチーフと同一視する) という関係式のもと、トーリック多様体のモチビク Chow 級数の有理性が再び Javier Elizondo と研究代表者との共同研究によって示されたのである。これを一種のコホモロジーと見た場合、連続的な変形に対してコホモロジーの次元が変わってしまう非常に敏感なインバリアントになることも示され、一方射影平面の十分多くのデータな点を Blow-up した図形に対しては有理性が成り立たない (高橋宣能、黒田茂と研究代表者の共同研究) ことがわかるなど、モチーフそのものの有限次元性と比べて複雑な状況を呈していることが明らかになりつつあった。

2. 研究の目的

まず、モチーフの有限次元性の証明を大目標とする。その一方で、派生した様々な問題、特にモチビク Chow 級数の有理性を精密に調べる。また、次のような大きな狙いがあった。そもそも「モチーフ」とは、数概念の一般化である。有限集合を、集合として同型なものを同一視し、和集合を足し算、積集合を掛け算と定義すれば自然数がなす半環が定義される。さらに形式的な差を導入することで、整数環が定まる。これはまさに有限集合の圏の K 環の定義である。無限集合の K 環を考えると、この考えは破綻するが、無限集合に構造を入れると、例えば有限 CW 複体の K 環は複体のオイラー数を対応させることで整数環と同型になる。これは「構造を持つ無限集合の点の個数」という意味だと捉えることができる。モチーフの有限次元性は、代数多様体の K 環に「適切な」関係を入れることで、大きすぎもせず小さすぎもせず、ちょうど良い大きさの K 環が自然な定義によって実現されることを予想したものだと言える。そう思うと、代数多様体以外の圏に対しても、適切な関係を入れることによって面白い K 環を定義することができそうに思える。

3. 研究の方法

数学においては、研究をするにはひたすら問題を考え続けるしかない。ヒントを求めて研究集会に参加したり、あるいは研究集会を企画したりすることで問題意識を共有する研究者と話をする時間を作ることは助けにはなるが、結局のところ自分で考え続けるしかない。

4. 研究成果

トーリック多様体のモチビク Chow 級数の余次元1の第1次無限小 Homotopy Equivalence のもとで有理性を証明した。また、代数曲面の変形で、その全てで0次元 Chow 群が自明な場合、その関係式は各代数曲面上の曲線と、その曲線上の有理関数の組有限個、というデータで表されるが、そのデータの有界性を証明した。本研究グループの成果ではないが、本研究期間中にライバルの研究者である Ayoub が、非特異代数多様体のモチーフの圏からベクトル空間の圏へのコホモロジー関手が Conservative である、とする Conservativity 予想を証明した。それによって本研究課題の中心的目標であったモチーフの有限次元性予想も解決されたことになる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計18件)

1. Yamaguchi, Toshihiro; Yokura, Shoji Poset-stratified space structures of homotopy sets. *Homology Homotopy Appl.* 21 (2019), no. 2, 1-22. (査読あり)
2. Kimura, Shun-ichi; Sheng, Mao; Zhang, Mingwei “Numerical boundedness on rational equivalences of zero cycles on algebraic varieties with trivial CH_0 ”, *Asian Journal of Math.* 22 (2018) 569-576 (査読あり)
3. Yokura, Shoji Hirzebruch χ_y -genera of complex algebraic fiber bundles—the multiplicativity of the signature modulo 4. *Schubert varieties, equivariant cohomology and characteristic classes—IMPANGA 15*, 315-330, EMS Ser. Congr. Rep., *Eur. Math. Soc., Zürich*, 2018 (査読あり)
4. Mizukawa, Hiroshi; Yamada, Hiro-Fumi Arithmetic identities for class regular partitions. *Hokkaido Math. J.* 47 (2018), no. 1, 205-221. (査読あり)
5. Ando, Masanori; Yamada, Hiro-Fumi Products of parts in class regular partitions. *Hiroshima Math. J.* 47 (2017), no. 1, 15-18. (査読あり)
6. Cappell, Sylvain E.; Maxim, Laurentiu; Schürmann, Jörg; Shaneson, Julius L.; Yokura, Shoji Characteristic classes of symmetric products of complex quasi-projective varieties. *J. Reine Angew. Math.* 728 (2017), 35-63. (査読あり)
7. Yokura, Shoji “Counting” spaces and related topics. *Topology Appl.* 225 (2017), 206-219. (査読あり)
8. Rovi, Carmen; Yokura, Shoji Hirzebruch χ_y -genera modulo 8 of fiber bundles for odd integers y *Pure Appl. Math. Q.* 12 (2016), no. 4, 587-602. (査読あり)
9. Yamaguchi, Toshihiro; Yokura, Shoji Fiber-homotopy self-equivalences and a classification of fibrations in rational homotopy. *J. Homotopy Relat. Struct.* 11 (2016), no. 4, 957-972 (査読あり)
10. Brasselet, Jean-Paul; Schürmann, Jörg; Yokura, Shoji Motivic and derived motivic Hirzebruch classes. *Homology Homotopy Appl.* 18 (2016), no. 2, 283-301. (査読あり)
11. Yamada, Hirofumi Generalized binomial transform applied to the divergent series. *Acta Phys. Polon. B* 47 (2016), no. 11, 2413-2444. (査読あり)
12. Kimura, Shun-ichi; Kuroda, Shigeru; Takahashi, Nobuyoshi “The closed cone of a rational series is rational polyhedral” *J. Algebra* 405 (2014) 243-258 (査読あり)

13. Bussi, Vittoria; Yokura, Shoji Naive motivic Donaldson-Thomas type Hirzebruch classes and some problems. *J. Singul.* 10 (2014), 26-53. (査読あり)
14. Hamada, Kazuya; Yamaguchi, Toshihiro; Yokura, Shoji c-symplectic poset structure on a simply connected space. *Topology Appl.* 161 (2014), 107-126. (査読あり)
15. Schürmann, Jörg; Yokura, Shoji Motivic bivariant characteristic classes. *Adv. Math.* 250 (2014), 611-649. (査読あり)
16. Mizukawa, Hiroshi; Nakajima, Tatsuhiro; Seno, Ryoji; Yamada, Hiro-Fumi Schur function identities arising from the basic representation of $A_2^{(2)}$ *Lett. Math. Phys.* 104 (2014), no. 10, 1317-1331. (査読あり)
17. Cappell, Sylvain; Maxim, Laurentiu; Ohmoto, Toru; Schürmann, Jörg; Yokura, Shoji Characteristic classes of Hilbert schemes of points via symmetric products. *Geom. Topol.* 17 (2013), no. 2, 1165-1198. (査読あり)
18. Ando, Masanori; Suzuki, Takeshi; Yamada, Hiro-Fumi Combinatorics for graded Cartan matrices of the Iwahori-Hecke algebra of type A *Ann. Comb.* 17 (2013), no. 3, 427-442. (査読あり)

〔学会発表〕(計 1件)

1. Shun-ichi Kimura, The first Congress of Algebraic Geometry of Mexico, 2016年10月、Casa Mathematica Oaxaca (メキシコ) Rationality of Motivic Chow Series modulo infinitesimal A^1 -homotopy

〔図書〕(計 3件)

1. 木村俊一著 東京図書「基幹講座 数学 線型代数」2018年322ページ
2. 木村俊一著 講談社「天才数学者はこう解いたこう生きた、方程式四千年の歴史」2016年288ページ
3. 木村俊一著 角川学芸出版「数学の魔術師たち」2015年397ページ

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：與倉 昭治

ローマ字氏名：(Yokura, Shoji)

所属研究機関名：鹿児島大学

部局名：理学部

職名：教授

研究者番号(8桁): 60182680

研究分担者氏名：山田 裕史

ローマ字氏名: (Yamada, Hirofumi)

所属研究機関名: 熊本大学

部局名: 大学院先端科学研究部 (理)

職名: 教授

研究者番号 (8桁): 40192794

(2)研究協力者

研究協力者氏名:

ローマ字氏名:

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。