

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25287009

研究課題名(和文)非コンパクト空間上の非線形楕円型作用素によるモジュライ理論の構成

研究課題名(英文)Moduli theory of non linear elliptic operators over non compact manifolds

研究代表者

加藤 毅 (Kato, Tsuyoshi)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20273427

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,000,000円

研究成果の概要(和文)：サイバーグウィッテン理論でのbauer-古田によるモノポール写像を、AHS複体が閉像である場合に、普遍被覆空間上で構成した。そのためには作用素代数を土台にしたHigson-Kasparov-TroutによるHilbert空間上の無限次元Bott周期性を用いた。特に線形化写像が同型を与える場合に、被覆モノポール写像度を同変E群の元として与え、そこから群環に関わるK群の間の準同型を構成した。それがbauer-古田によるモノポール写像度の普遍被覆版に相当する。その応用として、4次元スピノ分類多様体に対して、新しい位相不等式を予想し、一般型極小複素曲面を含む多くのクラスでそれが成立することを示した。

研究成果の概要(英文)：I have constructed a monopole map over the universal covering space of a compact oriented smooth four manifold. We apply the infinite dimensional Bott periodicity by Higson-Kasparov-Trout. In particular its degree was given when the linearized map is isomorphic, as an element in the equivariant E theory. It produces a homomorphism between K group of C^* algebras related to the group ring. It corresponds to a covering version of the Bauer-Furuta degree. As an application, we proposed an aspherical 10/8 inequality for spin classifying 4 manifolds. We have also verified that it certainly holds for large class of 4 manifolds which includes complex minimal surfaces of general type.

研究分野：幾何学

キーワード：ゲージ理論 非可換幾何学 モノポール写像 普遍被覆空間

1. 研究開始当初の背景

コンパクト多様体上で展開されてきた Atiyah-Singer 指数定理は、その上の非線形解析に関わるモジュライ理論と、その被覆空間上で展開される非コンパクト多様体上の群作用付指数定理へと、それぞれ独自の発展を遂げた。ここではその両者を合わせた、被覆空間上のモノポール写像度の構成とその応用の研究を行う。

2. 研究の目的

コンパクト多様体上の線形楕円型作用素に関わる大域解析は、Atiyah-Singer 指数定理を一つの土台として、微分幾何学と位相幾何学とを結びつける。それは現代の発展において少なくとも、非線形性と空間の非コンパクト性による2つの明確な方向性が与えられている。前者は非線形楕円型作用素の解集合を研究対象とするモジュライ理論であり、特に楕円型作用素の指数はそのモジュライ空間の接空間として理解される。ゲージ理論やシンプレクティック幾何学に現れる基本的なメカニズムであり、無限次元空間内において多様体論の構成を行うものである。後者はコンパクト多様体の普遍被覆空間上にすべての構造を持ち上げることで自然に与えられる、基本群作用付きの線形楕円型作用素の指数を、離散群の表現論的に K 理論を用いて理解する Atiyah の指数定理を基本としている。 L^2 コホモロジー理論や幾何学的群論を通じて、群作用素環加群を幾何学的に解析するものであり、非可換幾何学と呼ばれる。

ここではその両者を融合させた、非コンパクト空間上での非線形楕円型作用素のモジュライ理論の研究を行った。特に、サイバーグ・ウイッテン理論でのバウアー・古田によるモノポール写像を、普遍被覆空間上で構成し、その応用を見出すことが目的である。非可換幾何学の発展において理解されてきたことは、普遍被覆空間上の解析には基本群の大域解析的な構造が大きく反映されることである。バウアー・古田理論の普遍被覆空間版の構成とともに、その解析が適合する離散群のクラスの研究も同時に行う。

3. 研究の方法

非コンパクト空間上での函数解析的手法を開発することを行った。これまで、非線形偏微分方程式を用いたコンパクト多様体上の解析は大きく発展してきた。一方で非コ

ンパクト空間上の解析は、Atiyah-Singer 指数定理を拡張する研究が大きく進展してきたものの、その非線形版は始まったばかりでありいまだ発展途中である。コンパクト多様体上で機能してきたメカニズムをそのまま非コンパクト空間上で行うことは、一般的にはほとんど不可能であるが、それが実行可能となる幾何学的な空間のクラスを定式化することで、非線形偏微分方程式を用いた非コンパクト空間上の大域解析の構成を行った。

無限次元ヒルベルト空間の間の非線形な写像に対して、対応する写像度を K 群の言葉で記述することが基本的な方法である。コンパクト多様体の場合には、バウアー・古田による有限次元近似の手法が確立されており、基本的には有限次元ベクトル空間の間のプロパー写像に対する写像度を求めることに帰着される。ここでは真に無限次元空間の間の写像に対して、その写像度を定める必要がある。そのためには作用素代数を土台にした Higson-Kasparov-Trout による Hilbert 空間上の無限次元 Bott 周期性を用いた。また、 L^2 コホモロジー理論を適用することで、

古田の $10/8$ 不等式の普遍被覆版が成立する離散群のクラスを見出す。具体例での計算も重要であるが、それに関しては residually finite な群に対して、ある種の写像度の列の極限として求める手法を与える。

近年オートマタ群の理論が無限群論において大きく進展している。そこで得られてきた解析的手法を普遍被覆空間上の解析に応用することで、 L^2 コホモロジー群の計算を進展させる。

4. 研究成果

被覆空間上で AHS 複体が L^2 閉像である場合に、被覆モノポール写像が局所強プロパーであることを示した。特に線形化写像が同型を与える場合に、被覆モノポール写像度が同変 E 群の元として与えられ、そこから群環に関する作用素代数の K 群の間の準同型が構成された。それがバウアー・古田によるモノポール写像度の普遍被覆版に相当する。

モノポール写像度の構成の応用として、古田によって位相不変量の間新たな不等式

b₂(M) 10/8 | (M) | がコンパクト spin 4 次元多様体に対して与えられた。被覆モノポール写像度の応用として、ここでは spin 4 次元分類多様体上で新しい aspherical 不等式 | (M) | 10/8 | (M) | を提案した。これは古田の方法を普遍被覆空間上で構成し、分類空間の L² コホモロジーに関する Singer 予想を組み合わせれば得られる。

具体例では、曲面束の場合には Kotchick が基本群が amenable の場合には Bohr が、上記とは全く異なる手法により、4 次元多様体の個別な性質に基づいて示していた。同様にここでは一般型極小複素曲面の場合に上の不等式が従うことを示した。

また古田の 10/8 不等式の普遍被覆空間版については、L² コホモロジー理論に関するリュックの定理を適用することで、基本群が residually finite であるときに成立することを示した。グロモフ双曲群の多くが residually finite であることが知られており、これは離散群の大きなクラスを与える。その一方でここでの手法は、有限群の無限列を用いることが本質的なアイデアであり、residually finite でない無限群に対しては全く拡張できない。

Kasparov-Nakamura との共同研究により、古田の 10/8 不等式について、アダムス作用素を用いることで別証明を与えた。

基本群が自由アーベル群の時の被覆モノポール写像度を、p-進整数環の類似物に値を持つ具体的な射影作用素により、K 群の元で与えた。それは Kasparov による射影作用素と、Bryan による巡回有限群が作用する場合の同変写像度の計算とを組み合わせることで得られた。

辻本・Zuk との共同研究により、オートマトンに対応する Markov 作用素に関して、箱玉系と呼ばれる可積分系に現れる対象と、オートマタ群の代表的な例であるランプライター群のそれとを比較することで、両者の固有値が完全に一致することを示した。それは完全離散で、区間において稠密に分布している。

オートマタ群や箱玉系が関わる力学系のスケール変換の幾何学について、教科書を書いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

1. Tsuyoshi Kato, Satoshi Tsujimoto and Andrzej Zuk
Spectral coincidence of transition operators, Automata groups and BBS in tropical geometry,
Comm. Math. Phys, 350,1,205-229 (2017) 査読有

2. Tsuyoshi Kato
Covering monopole map and higher degree in non commutative geometry
arXiv:1606.02402 (2016) 査読無

3. S. Tsujimoto, T. Kato and A. Zuk,
Automata groups and box-ball systems
RIMS, Kôkyûroku Bessatsu,
B47,163-170 (2014) 査読有

4. T. Kato,
Automata in Groups and Dynamics and Induced Systems of PDE in Tropical Geometry
Journal of Geometric Analysis,
24,2,901-987 (2014) 査読有

5. Tsuyoshi Kato
A note on the pentagram map and tropical geometry
arXiv,1405.0084,1-8 (2014) 査読無

[学会発表](計 12 件)

1. T. Kato,
Higher degree of the covering monopole map in non commutative geometry,
Math of Gauge fields, Simons Center for Geometry and Physics 2017/03/31

2. T. Kato,
Covering monopole map in non commutative geometry
NCG Shanghai 2017, Connes 70 anniversary, 2017/03/24

3. T. Kato,
Covering monopole map in non commutative geometry,
Complex geometry and geometric analysis (Meiji University) 2017/03/13

4. T. Kato,
Higher degree of the covering monopole map,
second Australia-Japan Geometry, Analysis and its applications (Kyoto University) 2017/01/30

5. 加藤 毅
被覆モノポール写像都その応用
東工大幾何セミナー 2017/01/27

6. T. Kato,
Higher degree of the covering monopole map and its computation 1,2,3, Geometric Analysis in Geometry and Topology 2016, Tokyo Institute Technology 2016/12/

7. T. Kato,
Higher degree of the covering monopole map in four manifold theory Perspectives and Challenges in Mathematical Sciences (Heiderberg University) 2016/10/01

8. T. Kato,
K-theoretic degree of the covering monopole map

Australia-Japan geometry, analysis and their applications
(University of Adelaide), 2015/10

9. T. Kato,
K-theoretic degree of the covering monopole map, Geometry seminar at Vanderbilt University, 2015/09/25

10. T.Kato,
Non linear analysis over infinite dimensional spaces and its applications
Cooology talk at University of Adelaide 2015/02/06

11. T. Kato,
Spectral coincidence between automata groups and BBS in tropical geometry, Geometry and physics seminar at Penn-State University 2014/09/02

12. T. Kato,
Spectral coincidence of transition operators between automata groups and BBS in tropical geometry
Special week on operator algebras (East China Normal University) 2014/08/04

〔図書〕(計 1 件)

Tsuyoshi Kato
Dynamical scale transform in tropical geometry,
World Scientific (book) (2017)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織 (1) 研究代表者

加藤 毅 (Kato, Tsuyoshi)
京都大学理学研究科・教授
研究者番号：20273427

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

木田良才 (Kida Yoshikata)
東京大学数理科学研究科・准教授
研究者番号：90451517

尾國新一 (Oguni Shin-ichi)
愛媛大学理工学研究科・准教授
研究者番号：00549446

深谷友宏 (Fukaya Tomohiro)
首都大学東京理工学研究科・准教授
研究者番号：40583456

塚本真輝 (Tsukamoto Masaki)
京都大学理学研究科・准教授
研究者番号：70527879

松尾信一郎 (Matsuo Shinichiroh)
名古屋大学多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：40599487

(4) 研究協力者

()