

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287011

研究課題名(和文)カラビヤオ構造と一般化された幾何構造の統合的研究

研究課題名(英文)Integrated research of Calabi-Yau structures and generalized complex structures

研究代表者

後藤 竜司 (Goto, Ryushi)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30252571

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,800,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は一般化されたケーラー多様体においても、無限次元のシンプレクティック幾何の枠組みが適用され、モーメント写像が構成され、このモーメント写像が一般化されたケーラー多様体のスカラー曲率と見なせることを示した。筆者は一般化された接続の概念を導入し、一般化されたケーラー多様体上のベクトル束においてもシンプレクティック幾何の枠組みが適用出来ることを見抜き、一般化された正則ベクトル束の曲率をモーメント写像の枠組みを使って定式化した。このアインシュタイン-エルミート条件を満たす一般化された接続のモジュライ空間を構成し、変形複体が楕円型であることを示し有限次元の変形空間を構成した。

研究成果の概要(英文)：From a view point of the moment map, we introduce the notion of Einstein-Hermitian generalized connections over a generalized Kahler manifold of symplectic type. We show that moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections arise as the Kahler quotients. The deformation complex of Einstein-Hermitian generalized connections is an elliptic complex and it turns out that the smooth part of the moduli space is a finite dimensional Kahler manifold. The canonical line bundle over a generalized Kahler manifold of symplectic type has the canonical generalized connection and its curvature coincides with "the scalar curvature as the moment map". Kahler-Ricci solitons provide examples of Einstein-Hermitian generalized connections and Einstein Hermitian co-Higgs bundles are also discussed.

研究分野：微分幾何、複素幾何

キーワード：一般化された複素構造 カラビヤオ構造 一般化されたケーラー構造 ポアソン構造 変形理論 ケーラーアインシュタイン計量 エルミートアインシュタイン計量 モーメント写像

1. 研究開始当初の背景

一般化された複素構造および一般化されたケーラー構造は通常の複素構造, シンプレクティック構造を特別な場合として含む多様体の幾何構造である. ポアソン幾何, ノンケーラー幾何(双エルミート幾何), 非可換代数幾何, 幾何学的偏微分方程式, 実4次元の微分トポロジーなど, 様々な分野と深く関連しており, この研究分野の大きな広がりが注目されている. 申請者の研究により, 一般化されたケーラー多様体の変形安定性定理が確立され, 非自明な一般化されたケーラー多様体が正則なポアソン構造により豊富に構成されることが示され, この分野の研究が急速に進展した. 一方, 近年, ケーラー・アインシュタイン幾何学において, Donaldson-Tian-Yau 予想がファノ多様体に関して解決され顕著な発展が起こっている.

2. 研究の目的

本研究はこれらの発展を取り込み, 一般化された複素多様体および一般化されたケーラー多様体の研究を更に推進することを目的とした.

3. 研究の方法

一般化されたカラビーヤオ構造, 一般化された複素構造に関して, 研究を進めた. これらの幾何構造は研究代表者:後藤が確立した特殊な微分形式の定める幾何構造の理論が適用出来る重要な幾何構造である. 一般化された複素構造はポアソン幾何, 非可換幾何, 導来圏の変形, 4次元多様体の微分トポロジーそして数理物理など, 様々な分野との関連が示されている. これらとの関連をもっと明確にすることを目標に一般化された複素多様体の研究を進展させた. 具体的には, 1. 複素曲面上の一般化された複素構造の変形とモジュライ空間の構成 2. 実4次元多

様体上の一般化された複素構造の対数変換による構成 3. トーラス作用を用いた一般化されたカラビーヤオ構造の構成などを行い, 更に, 研究の発展に伴い次のテーマの研究も行った.

- (I) 一般化されたケーラー多様体上のベクトル束に関する Kobayashi-Hitchin 対応
- (II) 一般化されたケーラー多様体に関する Donaldson-Tian-Yau 予想
- (III) 導来圏の変形, 非可換代数幾何と一般化された複素幾何との対応

4. 研究成果

(1) 一般化された複素構造は Hitchin により 2002年に導入された多様体上の幾何構造であり, 複素構造, シンプレクティック構造を特別な場合として含み, さらにこの二つの幾何構造が混合した新しい幾何構造となっている. 一般化されたケーラー構造は通常のケーラー構造の拡張であり, 双エルミート構造と同値であることが示され, また非可換代数多様体との関連も示されて注目されている. ケーラー多様体上に非零な正則ポアソン構造があると, ポアソン構造のランクの変化に応じて, 構造のタイプ数がジャンプする一般化された複素構造が構成され, 興味深い研究対象となっている. 特に, 複素曲面上, ポアソン構造により得られた一般化された複素構造 に関しては, ポアソン構造の零点集合が非特異ならば, その変形は常に非障害的であり, 変形は零点集合の補集合の第二特異コホモロジーにより与えられるという結果を証明した(論文[1]参照). これらの結果は通常の複素構造の変形とは異なり, 一般化されたポアソン曲面については変形が位相的なものになるという顕著な特質を示している.

(2)実4次元の多様体には,複素構造もシンプレクティック構造も入らないが,一般化された複素構造が入るものがある(Gualtieri and Cavalcanti の結果). 一般の対数変換に対して一般化された複素構造を構成する手法を開発し,ジャンピング・ローカスの成分の個数をいくらかでも大きく出来る4次元多様体を構成した([2] 参照).

(3) ケーラー幾何学において, スカラー曲率がモーメント写像として現れることが知られている(Donaldson-Fujiki の定理). 研究代表者は一般化されたケーラー多様体においても,無限次元のシンプレクティック幾何の枠組みが適用され,モーメント写像が構成され,このモーメント写像が一般化されたケーラー多様体のスカラー曲率と見なせることを示した. 一般化されたケーラー多様体上においては Levi-civita 接続はうまく定義されない. また曲率もテンソルとはならない困難があるのだが, スカラー曲率, およびリッチ曲率はモーメント写像により, 自然に定義される点が注目すべき点である. これらの研究成果は論文 scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry にまとめ, Arxiv 上の発表し, また, 海外の研究集会にて講演した.

(4) 一般化されたケーラー多様体上のベクトル束の研究を進めた. ケーラー多様体上のアインシュタイン-エルミート計量はシンプレクティック幾何学の枠組みにおいて捉えることが可能であり, 曲率のアインシュタイン-エルミート条件はモーメント写像として現れることが知られている. 筆者は一般化された接続の概念を導入し, 一般化されたケーラー多様体上のベクトル束においてもシンプレクティック幾何の枠組みが適用出来ることを見抜き, 一般化された正則ベクトル束の曲率をモーメント写像の枠組みを使って定式化した. (一般化された接続においては通常の方法においては曲率はテンソルではなく微分作用素

となってしまうため, 発想の転換が必要であった.) この新しい曲率の定義から, 一般化されたケーラー多様体上のベクトル束の新しいアインシュタイン-エルミート条件を定式化した. 更に, このアインシュタイン-エルミート条件を満たす一般化された接続のモジュライ空間を構成し, 変形複体が楕円型であることを示し有限次元の変形空間を構成した. 特に, 標準束に入るキャノニカルな接続の曲率が(3)において構成した一般化されたケーラー多様体のスカラー曲率に一致することを示し, ケーラー多様体の場合と同等の対応が確立された. これらの結果は論文 Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kahler manifolds of symplectic type, Ryushi Goto にまとめ, Arxiv 上に発表し, 国内外の様々な研究集会にて発表した. これらの研究により, 一般化されたケーラー幾何において, アインシュタイン-ケーラー計量, アインシュタイン-エルミート計量 の概念が確立され, 今後の更なる発展の道筋が示された.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

[1] Goto Ryushi ;

Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by  $\mathbb{C}$

logarithmic symplectic structures and logarithmic Poisson structures.

Geometry and topology of manifolds, 159-

183, Springer Proc. Math. Stat.,

154, Springer, [Tokyo], 2016.

[2] Goto, Ryushi; Hayano, Kenta;

$\mathbb{C}$ -logarithmic transformations and generalized complex structures.

J. Symplectic Geom. 14 (2016), no. 2, 341-357.

[3] Mabuchi, Toshiki;

The Yau-Tian-Donaldson conjecture for general polarizations, I.

Geometry and topology of manifolds, 235-245, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, [Tokyo], 2016.

[4] Oguiso, Keiji;

On automorphisms of the punctual Hilbert schemes of K3 surfaces.

Eur. J. Math. 2 (2016), no. 1, 246-261.

[5] Mabuchi, Toshiki; Nitta, Yasufumi

Strong K-stability and asymptotic Chow-stability.

Geometry and analysis on manifolds, 405-411, Progr. Math., 308, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[6] Mabuchi, Toshiki;

The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations.

Geometry and analysis on manifolds, 395-403, Progr. Math., 308, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[7] Goto, Ryushi;

On the stability of locally conformal Kähler structures.

J. Math. Soc. Japan 66 (2014), no. 4, 1375-1401.

[8] Oguiso, Keiji;

Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics. Proceedings of the International Congress of Mathematicians Seoul 2014.

Vol. II, 695-721, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

以上 全て査読有り.

[学会発表](計17件)

[1] Goto, Ryushi, Scalar curvature is moment map in generalized Kähler geometry, AMS Sectional Meeting AMS Special Session, Fall Western Sectional Meeting University of California, Riverside, Riverside, CA (招待講演)(国際学会) USA, 2017年11月

[2] Goto, Ryushi, Holomorphic Poisson structures and generalized Kähler geometry, University of California, Riverside, Department of Mathematics, Colloquium(招待講演)(国際学会), USA, 2017年11月

[3] Goto, Ryushi, Moduli spaces of Einstein-Hermitian generalized connections over generalized Kähler manifolds of symplectic type The 23rd Symposium on Complex geometry (Kanazawa)(招待講演)(国際学会), 2017年11月

[4] Goto, Ryushi, Stratified flat structure on the moduli space of generalized complex surfaces, HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVIII(招待講演)(国際学会), 2016年7月

[5] Goto, Ryushi, Scalar curvature as moment map in generalized Kähler geometry,

The 22nd Symposium on Complex Geometry in Kanazawa(招待講演)(国際学会), 2016年11月

[6] Goto, Ryushi, scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry, Generalized Geometry and Noncommutative Algebra, CMI Workshop,(招待講演)(国際学会), 2016年12月, Oxford, UK

[7] Goto Ryushi, Scalar curvature as moment map in generalized Kahler geometry, The second China-Japan geometry conference at Fujian Normal University(招待講演)(国際学会), 2016年9月, Fujian, China

[8] Goto Ryushi, 一般化された複素多様体と変形理論, 東京工業大学 集中講義(招待講演), 2015年06月29日~2015年07月03日  
東京工業大学

[9] Goto Ryushi, 対数的ポアソン構造と一般化された複素多様体の非障害的な変形について,  
東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻大岡山談話会(招待講演), 2015年07月01日, 東京工業大学

[10] Goto Ryushi, Stratified flat structures on moduli spaces of generalized complex surfaces,  
The 21st Symposium on Complex Geometry(招待講演)(国際学会), 2015年10月30日~2015年10月30日,  
金沢大学サテライトプラザ

[11] Goto Ryushi, Flat structures on moduli spaces of generalized complex surfaces,

東京大学数理科学研究科複素解析幾何セミナー(招待講演), 2015年09月28日~2015年09月28日,  
東京大学数理科学研究科

[12] Goto Ryushi, Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by logarithmic Poisson structures,  
2015年03月12日~2015年03月12日, 大阪大学  
満淵俊樹教授退職記念小研究会

[13] Goto Ryushi, Deformations of generalized complex manifolds and locally conformally generalized kaehler structures,  
Complex Geometry and Lie Groups(招待講演), 2014年06月18日~2014年06月18日, Torino, Italy

[14] Goto Ryushi, Unobstructed deformations of generalized complex structures induced by logarithmic Poisson structures,  
The 10th Geometry Conference for the Friendship between China and Japan(招待講演), 2014年09月07日~2014年09月11日, Fudan University, China

[15] Goto Ryushi, Generalized complex structures on 4-manifolds and generalized hyperkaehler structures,  
The Asian Mathematical Conference 2013,(招待講演),  
2013年06月30日~2013年07月04日, BEXCO, BUsan, Korea

[16] Goto Ryushi, Generalized complex 4-manifolds and generalized Calabi-Yau metrical structure,

The 8th Pacific Rim Complex Geometry  
Conference(招待講演), 2013年08月05日  
~2013年08月09日, Dalian, Liaoning, China

[17] Goto Ryushi, Generalized complex  
structures and generalized Calabi-Yau  
metrics,  
Symplectic Algebraic geometry(招待講演),  
2013年09月29日~2013年09月29日, Kansai  
seminar house, Kyoto

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

後藤 竜司 (Goto Ryushi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30252571

### (2) 研究分担者

満淵 俊樹 (Mabuchi Toshiki)  
大阪大学・その他部局・名誉教授  
研究者番号：80116102

### 研究分担者

小木曾 啓示 (Oguiso, Keiji)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：40224133