

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25287012

研究課題名(和文) 曲面の変分問題の幾何解析における新しい方法の探求

研究課題名(英文) New methods on geometric analysis of variational problems for surfaces

研究代表者

小磯 深幸 (KOISO, Miyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：10178189

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,300,000円

研究成果の概要(和文)：石鹸膜，シャボン玉の表面の数学的抽象化と言える数学概念として，それぞれ，極小曲面，平均曲率一定曲面(以下ではCMC曲面と記す)がある．極小曲面は面積の平衡曲面，CMC曲面は囲む体積を変えない変分(許容変分と呼ぶ)に対する面積の平衡曲面である．これらの曲面は，対応する許容変分に対する面積の極小値をとる時，安定であると言われる．本研究では，極小曲面やCMC曲面について，固定境界，自由境界，周期境界条件のもとで，安定性の判定とモース指数(不安定度)の評価，安定解の存在と一意性，解空間の構造についての研究成果を得た．

研究成果の概要(英文)：Under given boundary conditions, minimal surfaces are critical points of area, and surfaces with constant mean curvature (CMC surfaces) are critical points of area among surfaces enclosing the same volume. Such a surface is said to be stable if it attains a local minimum of area for all admissible variations. In this research, we studied criteria for stability, existence and uniqueness of (stable) critical points, bifurcation of critical points, for fixed, free, and periodic boundary conditions.

研究分野：微分幾何学

キーワード：平均曲率一定曲面 極小曲面 安定性 変分問題 分岐理論 三重周期極小曲面 自由境界問題 プラトー問題

1. 研究開始当初の背景

(超)曲面に対する変分問題の中で代表的なものとして、極小曲面と平均曲率一定曲面(以下ではCMC曲面と記す)がある。前者は面積(汎関数)の平衡曲面、後者は「囲む体積が一定」なる付加条件のもとでの面積の平衡曲面であり、数学的にも応用面でも自然な研究対象である。極小曲面は面積の第2変分が非負であるとき安定であるといわれ、CMC曲面は囲む体積を保つ変分に対する面積の第2変分が非負であるとき安定であるといわれる。特に、面積極小解は安定であり、平衡曲面の安定性を判定することは重要である。コンパクトで安定なCMC超曲面、3次元空間内の完備で安定なCMC曲面については、ある種の一意性が成立する。たとえば、 $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{(n+1)}$ においてはコンパクトで安定なものは球面に限り、 $n=2$ の時は非コンパクトで安定なものは平面に限る。一方、境界を持つ安定なCMC曲面(「解」と呼ぶ)の存在と一意性は、境界が単純な場合ですらよくわかっていない。解空間の構造については、ごく特別な場合を除きほとんど未解明であると言ってよい。位相型を固定すると、安定解が存在しても最小解が存在しない場合もあり、このことは解空間の構造の解明が容易ではないことを示唆している。

さて、面積汎関数よりも一般の、曲面の非等方的エネルギーを考えることも数学及び応用の両側面から重要である。単位球面上の正値連続関数 F を考え、 \mathbb{R}^3 内の曲面 M に対し、その各点での単位法ベクトル N に依存する正数 $F(N)$ の積分を M の非等方的エネルギーと呼ぶ。 $(\mathbb{R}^{(n+1)})$ 内の超曲面を考えることも可能。)「囲む体積」を保つ変分に対する非等方的エネルギーの臨界点是非等方的平均曲率一定曲面(以下、CAMC曲面と記す)と呼ばれ、CMC曲面や極小曲面の一般化となる。CAMC曲面は結晶やある種の液晶の数値モデルを与え、数学及び自然科学のさまざまな分野で研

究されている。結晶にかどがあることからわかるように、CAMC曲面は一般には特異点を持ち、微分幾何学的な研究はまだまだ発展途上である。

さて、上述の研究対象と密接に関連する物理現象として、次のものがある。たとえば液体と気体、液体と固体のような、物質の二相が混じり合わずに共存している時、それら二相を隔てる曲面を相境界という。非平衡状態における相境界の運動が曲面の幾何学的形状のみに依存する時、その動きを記述する方程式を曲面の発展方程式という。発展方程式の重要な例として、平均曲率流方程式や非等方的平均曲率流方程式がある。これは面積あるいは非等方的エネルギーが減少するように曲面が変形していく様子を記述する方程式で、非線形放物型偏微分方程式である。解析的に扱いにくく、一般には解けない。これらの曲率流方程式の極限は安定なCMC曲面あるいは安定なCAMC曲面となることが期待され、その意味でもCMC曲面やCAMC曲面の安定性の研究は重要である。一方、重力を無視できる微小な液体の表面は、平衡状態ではCMC曲面となる。たとえば、このような液体が蒸発していく時、表面が平均曲率一定でない形状が過渡的に現れ、さらに、1つの液滴が複数の液滴に分裂してしまうような実験結果が知られており、このような現象もCMC曲面の安定性と密接に関係している。これを理論的に解明すること、即ち、エネルギーの臨界点の存在・分岐・位相型の変化・安定性との関連などの解明が望まれている。

2. 研究の目的

極小曲面、CMC曲面、CAMC曲面などの、主として曲面に対する変分問題の解の大域的性質、安定性の判定とモース指数(不安定度)の評価、安定解の存在と一意性、解空間の構造について研究する。

3. 研究の方法

微分幾何学的方法（古典的な曲面論の方法，抽象多様体上の計量の変形，他）に加え，幾何解析的方法（偏微分方程式，関数解析，その他解析学的方法を有効に用いて幾何学的対象を研究する方法），偏微分方程式の発展方程式の議論，理論物理学の視点，計算機による数値計算を取り入れることによる数値実験や可視化を駆使することにより，研究を行う。

4. 研究成果

(1) 庄田敏宏氏（佐賀大学），Paolo Piccione 氏（ブラジル・サンパウロ大学）との共同研究により，3次元ユークリッド空間内の三重周期極小曲面に対する分岐理論を構成した．さらに，これを応用することにより，既知の三重周期極小曲面族からの分岐の例を発見した．即ち，H 族と rPD 族には分岐点がそれぞれ一つあり，tP 族と tD 族には分岐点がそれぞれ二つあることを証明した．

(2) 3次元ユークリッド空間内の互いに平行でない二平面（支持平面と呼ぶ）上に自由境界を持ちこれらの平面が囲む閉領域内にはめ込まれた曲面全体の集合を考える．曲面の境界が囲む支持平面内の領域の面積にあらかじめ与えた重み定数をかけたものを濡れエネルギーと呼ぶ．曲面の面積と濡れエネルギーの和を曲面の総エネルギーとする．曲面が囲む符号付き代数的体積を保つ任意の変分（許容変分と呼ぶ）に対する総エネルギーの臨界点（解と呼ぶ）は，支持平面との接触角が一定であるような CMC 曲面となる．各解は，任意の許容変分に対する総エネルギーの第二変分が非負である時に安定であると呼ばれる．濡れエネルギーが正である場合について，Jaigyoung Choe 氏（KIAS, Korea）との共同研究により，以下の結果を得た．

① 安定解であって，各支持平面との交わりが一つの単純閉曲線であるものは，球帽（球面の部分集合）に限ることを証明した．

② 一般次元ユークリッド空間内の超曲面に対して問題を一般化し，各支持超平面との交わりが凸閉部分多様体である安定解は球帽に限ることを証明した．

③ 光尾洋祐氏との共同研究により，「解が，二つの支持超平面の共通部分と交わる」場合についても上記と同様の安定解の一意性が成立することを証明した．

(3) 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の CMC 曲面に対する分岐理論及び分岐枝上の CMC 曲面の安定性の判定法を得た（B. Palmer 氏（アイダホ州立大学，米国），P. Piccione 氏との共同研究）．詳しくは以下の通りである．

① 同じ境界を持つコンパクト CMC 曲面の，平均曲率 H または囲む体積 V をパラメータとする一助変数族が与えられた時，CMC 曲面の分岐が起こるための十分条件を，面積汎関数の第二変分に付随する固有値問題の固有値及び固有空間についての情報，及び，CMC 曲面族のパラメータ依存性についての情報を用いることにより得た．

② ①で得た分岐は，ピッチフォーク分岐またはトランスクリティカル分岐となることを証明した．これより，分岐枝上の CMC 曲面が安定か否かの判定条件が得られた．

③ ①及び②を応用することにより，それまで安定か否かが知られていなかった CMC 曲面の具体例の安定性を判定した．

(4) 上述のように，シャボン玉の表面の数学的抽象化と言える数学概念として CMC 曲面がある．CMC 曲面は，境界を保ち囲む体積を変えない変分（許容変分と呼ぶ）に対する面積の臨界点である．大雑把に言うと，CMC 曲面は，任意の許容変分に対して面積の極小値をとる時，安定であると言われる．許容変分に対する第二変分が常に正となる CMC 曲面は面積極小であり，第二変分が負となる許容変分が存在する時は面積極小ではない．従来，許

容変分に対する第二変分が常に非負であり、かつ、第二変分が0となる許容変分が存在するという特異状態についての研究はほとんどなされてこなかった。Bennett Palmer氏との共同研究により、このような特異状態も含め、CMC曲面の安定性についての精密な判定条件を求めた。さらに、特異状態に対して面積の第三及び第四変分を求め、具体例についてそれらの正負を判定することにより、CMC曲面の安定性の判定には第二変分までの正負を判定するだけでは不十分であり特異状態の研究が重要であることを示した。なお、これらの結果は、非等方的曲面エネルギー汎関数の臨界点に対しても一般化可能である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計16件)

[1] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara, and K. Yamada, Mixed type surfaces with bounded mean curvatures in 3-dimensional space-times, *Differential Geometry and its Applications* 52 (2017), 64-77 (accepted for publication on March 22, 2017. published online on March 31, 2017). (査読有) DOI information: 10.1016/j.difgeo.2017.03.009 (査読有)

[2] Miyuki Koiso, Bennett Palmer, and Paolo Piccione, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, to appear in *Journal of the Mathematical Society of Japan* (accepted for publication on March 8, 2016). (査読有)

[3] Atsufumi Honda, Miyuki Koiso, and Kentaro Saji, Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, to appear in *Hokkaido Mathematical Journal* (Accepted for publication on January 21, 2016). (査読有)

有)

[4] Pham Hoang Ha, Yu Kawakami, A note on a unicity theorem for the Gauss maps, of complete minimal surfaces in Euclidean four-space, to appear in *Canadian Mathematical Bulletin*, DOI: 10.4153/CMB-2017-015-0 (査読有)

[5] Jaigyoung Choe and Miyuki Koiso, Stable capillary hypersurfaces in a wedge, *Pacific Journal of Mathematics* 280 (2016), 1-15. (査読有)

[6] S.Fujimori, Y.Kawakami, M.Kokubu, W.Rossmann, M.Umehara, K.Yamada, Entire zero mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space, *Quarterly Journal of Mathematics* 67 (2016), 801-837, DOI: 10.1093/qmath/haw038 (査読有)

[7] Onodera, M., Dynamical approach to an overdetermined problem in potential theory, *J. Math. Pures Appl.* (9) 106 (2016), 768-796. doi:10.1016/j.matpur.2016.03.011 (査読有)

[8] S. Fujimori, T. Shoda, Minimal surfaces with two ends which have the least total absolute curvature, *Pacific Journal of Mathematics* 282 (2016), 107-144. (査読有)

[9] N. Ejiri, S. Fujimori, and T. Shoda, A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3, *Topology and its Applications* 196 (2015), 880-903. (査読有)

[10] Miyuki Koiso, Bennett Palmer, and

Paolo Piccione, Bifurcation and symmetry breaking of nodoids with fixed boundary, *Advances in Calculus of Variations* 8 (2015), 337-370. (査読有)

[11] Yu Kawakami, Function-theoretic properties for the Gauss maps of various classes of surfaces, *Canadian Journal of Mathematics* 63 (2015), 1411-1434, DOI: 10.4153/CJM-2015-008-5 (査読有)

[12] Bartolucci, D.; Lee, Y.; Lin, C.-S.; Onodera, M., Asymptotic analysis of solutions to a gauged $O(3)$ sigma model. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 32 (2015), 651-685. doi:10.1016/j.anihpc.2014.03.001 (査読有)

[13] Onodera, M., On the symmetry in a heterogeneous overdetermined problem, *Bull. Lond. Math. Soc.* 47 (2015), 95-100. doi:10.1112/blms/bdu098 (査読有)

[14] Onodera, M., Geometric flows for quadrature identities, *Math. Ann.* 361 (2015), 77-106. doi:10.1007/s00208-014-1062-2 (査読有)

[15] Miyuki Koiso and Bennett Palmer, Stable surfaces with constant anisotropic mean curvature and circular boundary, *Proceedings of the American Mathematical Society* 141 (2013), 3817-3823. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11892-7> (査読有)

[16] Yu Kawakami, On the maximal number of exceptional values of Gauss maps for various classes of surfaces, *Mathematische Zeitschrift* 274 (2013),

1249-1260. DOI: 10.1007/s00209-012-1115-8 (査読有)

[学会発表] (計 78 件)

[1] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Workshop “Differential Geometry, Lie Theory and Low-Dimensional Topology”, 19-21 December, 2016, La Trobe University, Australia, 講演日 : 19 December, 2016.

[2] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Workshop on “Geometric Inequalities on Riemannian Manifolds”, November 23(Wed)-26(Sat), 2016, Haeundae beach, Busan, Korea, 講演日 : November 24 (Thu), 2016.

[3] Miyuki Koiso, Stability and bifurcation for surfaces with constant mean curvature, Twelfth Taiwan Geometry Symposium, National Tsing Hua University, May 14, 2016.

[4] Miyuki Koiso, Local structure of the space of all triply periodic minimal surfaces in \mathbb{R}^3 , Geometric aspects on capillary problems and related topics, Granada, Spain, December 14-17, 2015, 講演日 : December 16, 2015.

[5] Miyuki Koiso, Stable capillary hypersurfaces in a wedge and uniqueness of the minimizer, Conference “Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues”, June 1-5, 2015, Vilnius, Lithuania. 講演日 : June 2, 2015.

[6] Miyuki Koiso, Geometry of

hypersurfaces with constant anisotropic mean curvature, a Special Invited Talk, The 2013 Annual Meeting of the Taiwan Mathematical Society, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, from December 7 to 8, 2013. 講演日 : December 8, 2013.

[7] Miyuki Koiso, Bernstein-type theorems for surfaces with constant anisotropic mean curvature and CMC surfaces in the Lorentz-Minkowski space, 7th International Meeting on Lorentzian Geometry, July 22nd-26th, 2013, Sao Paulo, Brazil, 講演日 : July 25th, 2013.

[図書] (計1件)

[1] A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology - Theoretical Basis and Developments in Mathematical Modeling (Ed. R. Nishii, S. Ei, M. Koiso, 他4名), (執筆部分 : Miyuki Koiso, Stability analysis for variational problems for surfaces with constraint, pp.81-87 査読有), Springer, July, 2014. 総ページ数 : 507.

[その他]

ホームページ : http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/academic_staffs/view/86

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小磯 深幸 (KOISO, Miyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号 : 10178189

(2) 研究分担者

庄田 敏宏 (SHODA, Toshihiro)

佐賀大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 10432957

川上 裕 (KAWAKAMI, Yu)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号 : 60532356

小野寺 有紹 (ONODERA, Michiaki)

東京工業大学・理学院・准教授

研究者番号 : 70614999

(3) 連携研究者

成 慶明 (CHENG, Qing-Ming)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号 : 50274577

宮本 雲平 (MIYAMOTO Umpei)

秋田県立大学・総合科学教育研究センター・准教授

研究者番号 : 70386621

江尻 典雄 (EJIRI, Norio)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号 : 80145656