様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ９ 月 １７ 日現在

機関番号：３２４０３
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５２８７０１７

研究課題名（和文）群が作用する微分方程式の研究とその応用

研究課題名（英文）Study of differntial equations with actions of groups and its applications

研究代表者
大島　利雄（Oshima, Toshio）

城西大学・理学部・客員教授

研究者番号：５００１１７２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 13,900,000円

研究成果の概要（和文）：複素領域での多項式係数の線型常微分方程式論は歴史が古いが、分数階微分にもとづくFuchs型方程式の変換をmiddle convolutiontとして定式化したN.Katzのリジッドな方程式の研究以降，新展開をみせている。方程式の特異点の位置も変数とみなして多変数化することにより，古典的なAppellの超幾何を含む多変数のKZ方程式が得られる。当該研究では、KZ方程式に対してこれらの変換を用いた新たな視点での解析を行い、方程式の構成、解の積分表示、モノドロミー群の既約性などの基本問題を統一的に解明するとともに、元の常微分方程式の解の性質も明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Theory of linear ordinary differential equation with polynomial coefficients has a long history. In the study of rigid local system N. Katz introduced and formulated a transformation by fractional derivatives as a middle convolution. After his work there happens a novel development in the theory. Regarding the positions of singular points of the equations as new variables, we obtain KZ equations with several variables including Appell's hypergeometric equations. Applying this transformation to these equations, we analyze fundamental problems for these equations. For example, we construct these equations, give integral representations of their solutions, obtain the conditions of their irreducibility and moreover give a structure of the solutions of the original ordinary differential equations.

研究分野：代数解析学

キーワード：微分方程式　超幾何関数　常微分方程式　数式処理　KZ方程式

１．研究開始当初の背景

(1)複素領域の線型常微分方程式は古典的研究対象であったが，rigid local systems を決定する問題が N. Katz によって middle convolution という操作を導入することにより解かれ、新たな進展が始まった。まず、リジッドでない場合にも特異点での局所的な情報を満たす既約な Fuchs 型方程式や関数が大域的に存在するか、という Deligne-Simpson 問題が研究された。Schlesinger 型の一階システムの場合は Dettweiler-Reiter による行列での解釈の後、Crawley-Boevey によって箙の表現の問題に帰着して解決され、 Kac-Moody ルート系との対応が発見された。

(2)研究代表者は、単独高階の線形常微分方程式の場合に、スペクトル型と一般 Riemann scheme を定義し、 middle convolution にあたる操作を、１変数の Weyl 代数上の変換として与え、単独 Fuchs 型方程式の一般モデルの具体的構成を行った。Fuchs 型線型常微分方程式の空間に、ある Kac-Moody ルート系の Weyl 群が変換群として作用すること、およびアクセサリー・パラメータの数を固定するとその群の有限軌道になることを示し、 Fuchs 型方程式の解の積分表示、ベキ級数表示、接続係数、既約性、分類問題、隣接関係、多項式解などの古典的問題について決定的結果を得ていた。さらに進めて多変数の場合や不確定特異点を持つ場合も含めて統一的に扱うことが本研究の動機であった。

２．研究の目的

(1)多項式係数の一般の線型常微分方程式に対し、不確定特異点の場合も含め、Kac-Moody ルート型の Weyl 群の作用とみなせる変換などを通して、スペクトル型や積分表示の存在に注目して、解の大域的性質を明らかにするとともに、合流操作、モノドロミー保存変形、ホロノミックな線型偏微分方程式の場合へ結果の拡張を行い、特殊関数の研究や表現論、積分幾何などへ応用する。

(2)研究が進んでいる middle convolution のみならず，Laplace 変換や多変数の場合に現れる各種の変換の代数的性質を明らかにし、特に多変数の場合に常微分方程式の場合のような一般的理論を作る。

(3)研究を進めていく上で必要な微分作用素や行列の計算や結果の可視化のための数式処理のプログラムを開発し、他分野でも役立つようにマニュアルを含めて整備して公開する。

３．研究の方法

(1)研究代表者が中心となって研究を行うが、テーマに応じて分担者や協力研究者との共同研究を行う。東京大学などにおいて分担者および連携研究者と協力して，定期的に「古典解析セミナー」と「表現論セミナー」を開催して、講演、討論、共同研究を行うとともに、関連分野の研究者との情報交換を行う。さらに、関連研究者が集まって集中的な議論を行うためのワークショップを毎年 2~4 回程度企画し、開催する。また、国内の数理解析研究所などや海外で行われる関連分野の研究集会に参加し、最新の情報を得るとともに研究成果を発表する。

(2)当該研究において真理を見いだして一般的な結果を得るまでには、いくつかの基本的な例について微分作用素環での計算が必要であり、それには計算機による数式処理利用する。

４．研究成果

(1) 特異点が 4 点以上ある Fuch 型の rigid な方程式は、自然に古典的な Appell の超幾何を含む多変数の超幾何微分方程式とみなせることが分かり、多変数の超幾何関数に対しても従来の常微分方程式で確立した理論が適用できることが分かった。それにより、微分方程式の構成やそれのルート系による分類、解の表示、モノドロミー群の既約性などが従来の成果を発展させることによって具体的に解析可能になった。

(2) リジッドな Fuchs 型常微分方程式の可約条件を組み合わせ論的に容易に決めるアルゴリズムを与えた。その可約条件をルート系の観点から 3 種類に分類し、方程式が見かけの特異点をもたない既約成分を持つ条件との関連を明らかにした。

(3) 多変数の超幾何微分方程式で、モノドロミー群は既約であるが方程式が直積型に分解し，より易しい方程式に帰着される現象とその原理を発見した．最も簡単な場合は Appell の F4 でそのような分解の例がある。これはある変数に対して rigid な常微分方程式とみたときの可約条件の 3 種類のうちのある一つが現れることに対応していることを示した。

(4) 物理学者からの問題として挙げられていた |q|=1 における q-超幾何級数の収束について基本的な結果を得た。たとえば，|q|=1 の中で，ルベーグ測度零の集合を除いて収束半径が１であることが分かった。

(5) 常微分方程式の研究から偏微分方程式を含む場合に、研究対象が拡大した。その具体的計算のため、偏微分作用素環の元を成分に含む行列や Pfaff 系の各種変換に対する計算が必要になり、そのため数式処理システム Risa/Asir のライブラリの拡張に着手し、それを使っていくつかの新しい例や新たな発

見を得ることができた。たとえばモノドロミー群の既約性のみでは分からない方程式のある種の可約性の記述や、切り口に現れるリジッドではないが興味深い常微分方程式の導出などである。今後の研究に役立たせることを目的として Risa/Asir の関連するプログラムの開発を進め、特に視覚的にも綺麗に出力させる関数を作成して公開した。

(6) 4 点以上の特異点を持つリジッドな Fuchs 型方程式は、特異点の位置も変数とみなすと、多変数の KZ 型超幾何微分方程式を満たす。KZ 方程式に middle convolution を作用させたときの各留数行列の固有値の変化の記述が未解決問題として残されていて、これが多変数の場合の理論発展の妨げとなっていた。積分可能条件に対応して低次元の特異点での様々な留数行列が互いに可換となるが、これらの可換行列の組に対する同時固有空間分解の情報が重要であり、それをもとに middle convolution を作用させた後の固有値が記述されることを示すことによって、未解決であった問題を解いた。これは当研究における最大の成果であって、それ以降の研究の飛躍的進展を促す原動力となり，この進展は当該研究終了後も続いているが、当該研究中での進展を以下に述べる。なお、この同時固有値分解の計算も数式処理上で実現した。

(7) KZ 型方程式に対し，確定特異点において確定特異点型の境界値を取ることにより、より少ない変数の KZ 型方程式が現れる。このような制限を経由して、多変数 KZ 型超幾何微分方程式の接続問題を具体的に容易に解く方法を与えた。また，Jordan-Pochhammer 方程式のように、リジッドな常微分方程式の確定特異点の周りでの局所モノドロミーに重複度がある場合でも、特異点を合流させたときの解の漸近挙動で重複を分離できる場合が多く、今まで記述が困難であった重複度がある場合のリジッドな常微分方程式の接続問題の定式化と具体的計算手法を与えた。また、境界値を取ることにより、リジッドでないが解析可能として知られていた Dotsenko-Fateev 方程式やそれを一般的に拡張した方程式が系統的に得られることが分かった。

(8) さらにこのような枠組みで，いくつかの例が知られているだけで統一的理解ができていなかった不確定特異点を持つ多変数の KZ 型超幾何関数の開折と合流について，積分表示などの一般的な取り扱いが可能になり，これは今後，リジッドな多変数の不確定型特異点をもつ超幾何関数の理論が発展していく端緒となるものと期待できる。たとえば、リジッドで分岐のない不確定特異点をもつ多項式係数の線型常微分方程式は、KZ 拡張を持ち、その Pfaff 系方程式のよい基底や表示を与えることができた。

(9) KZ 方程式の空間には、変数の対称性に基づいて置換群が作用している。Middle convolution と addition による変換は星形 Kac-Moody ルート系の Weyl 群の作用とみなせるが，さらにこの置換の作用とを合わせた大きな変換を導入した。リジッドな常微分方程式の KZ 拡張を基にしても、これらの可逆変換を施していくと、どの変数からみてもリジッドでなくなることが普通に起こる。これらを合わせた変換を統制する群についてはまだ解明されていない点が多いが、線型常微分方程式の KZ 拡張とこれらの変換と制限と組み合わせると、線型常微分方程式に限っても、従来より遙かに広い変換が手に入ったことになる。これらの変換の軌道で自明な方程式を含むものを明かにすることは、今後、研究すべき興味ある問題の一つと考えられる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 21 件）

① Toshio Oshima, Transformation of KZ type equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B61, 2017, 141-162. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html
② Toshio Oshima, On convergence of basic hypergeometric series, Josai Mathematical Monographs, 査読有, 10, 2017, 215-223. http://libir.josai.ac.jp/contents/josai/kiyou/jmm/jmm.htm
③ Toshio Oshima, Reducibility of hypergeometric equations, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics, 査読有, 2017, 425-453.
④ 大島利雄, KZ 型超幾何系の変換と解析, 表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題, 数理解析研究所講究録, 査読無, 2031, 2017, 124-158. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/2017.html
⑤ Toshio Oshima, Drawing Curves, Mathematics for Industry, 査読有, 24, 2016, 95-106.
⑥ Toshio Oshima, Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation, Opuscula Math., 査読有, 35, 2015, 665-688. http://www.opuscula.agh.edu.pl/om-vol35iss5
⑦ Hiroshi Oda and Toshio Oshima, A quantization of linear algebra and its application to integral geometry,

Geometric Analysis and Integral Geometry, Contemporary Mathematics 査読有, **598**, 2013, 189-208.

⑧ Toshio Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, **B37**, 2013, 163-192.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html

〔学会発表〕（計 49 件）

① 大島利雄, Hypergeometric equations -- connection problem and confluence /unfolding, アクセサリー・パラメータ研究会 at 熊本大学, 2018.

② Toshio Oshima, Rigid Fuchsian ordinary differential equations and equations of KZ-type, Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations, Spain, 2017.

③ Toshio Oshima, Differential equations related to Whittaker functions and moderate growth, International Conference, Geometry, Representation Theory and Differential Equations, Kyushu Univ., 2015.

④ Toshio Oshima, Hypergeometric functions with several variables, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Poland, 2015.

〔図書〕（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

http://researcher.josai.ac.jp/html/100000328_ja.html

http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/index-j.html

os_muldif.rr（公開されたソフトウエア）
ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif

６．研究組織

(1)研究代表者

大島 利雄（OSHIMA, Toshio）
城西大学・理学部・客員教授
研究者番号：50011721

(2)研究分担者

坂井 秀隆（SAKAI, Hidetaka）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：50323465

(3)連携研究者

小林 俊行（KOBAYASHI, Toshiyuki）
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：80201490

(4)研究協力者

廣恵 一希 (HIROE, Kazuki)
中村 あかね (NAKAMURA, Akane)
原岡 喜重 (HARAOKA, Yoshishige)
眞野 智行 (MANO, Toshiyuki)
関口 次郎 (SEKIGUCHI, Jiro)
三町 勝久 (MIMACHI, Katsuhisa)
佐々木 隆 (SASAKI, Ryu)