

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287020

研究課題名(和文) 複素エノン写像の力学系：相空間からパラメータ空間へ

研究課題名(英文) Dynamics of complex Henon maps: from dynamical space to parameter space

研究代表者

石井 豊 (Ishii, Yutaka)

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：20304727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、実および複素エノン写像の位相的性質や組み合わせ論的性質について様々な角度から考察を行い、幾つかの成果を得た。中でも、実エノン写像族のパラメータ空間における双曲的ホースシュー領域や最大エントロピー領域の位相的性質、その境界のパラメータに置けるエノン写像の不変測度の変分原理的特徴付け、複素エノン写像族のパラメータ空間におけるモノドロミー群作用と記号力学系の自己同型群への表現の研究などを行った。

研究成果の概要(英文)：We obtained some results concerning combinatorial and topological aspects of both real and complex Henon maps. Among others, we studied topological properties of the hyperbolic horseshoe locus and the maximal entropy locus in the parameter space of the real Henon family, variational characterization of some invariant measures of the Henon maps at the boundary of the horseshoe locus, and the representation of the monodromy group action of the horseshoe locus for the complex Henon family to the automorphism group of the corresponding symbolic dynamics.

研究分野：力学系理論

キーワード：ヘノン写像 ジュリア集合 ホースシュー 反復写像系

1. 研究開始当初の背景

エノン写像族とは、

$$f_{\{c, b\}} : (x, y) \rightarrow (x^2 + c - by, x)$$

で与えられる \mathbb{C}^2 の多項式自己同型写像族である。この写像は、歴史的にカオスが初めて発見されたことで名高いローレンツ方程式の離散時間版として 1970 年代に導入された。その後、実変数の力学系としてはストレンジ・アトラクターの存在が証明された非一様双曲的力学系の最も重要なクラスとして、また複素変数の力学系としては多重ポテンシャル論を用いた多変数複素力学系のエルゴード論的研究のモデル・ケースとして、それぞれ活発に研究され続けている。

その一方で、1 変数 2 次多項式族の複素力学系理論の成功に見られるような、ジュリア集合の組み合わせ論的研究や、相空間とパラメータ空間との相互関係などについてはエノン写像についてはほとんど知られてこなかった。

2. 研究の目的

本研究で明らかにしたい最終目標は、複素エノン写像のパラメータ空間内の分岐現象に関する大域的構造を解明することにある。一般にエノン写像の性質、特にそのジュリア集合のトポロジーや組み合わせ論的性質は、パラメータに大きく依存する。本研究の目的は、相空間 \mathbb{C}^2 内の個々のジュリア集合が持つ組み合わせ論的情報をそのパラメータ空間へ「転送」することで、エノン写像族の分岐現象に関する大域的構造を解明する点にある。

現在までに、相空間からパラメータ空間への「転送」のアイデアが最も成功した理論は、2 次多項式族に対する Douady-Hubbard 理論である。そのカギは、充填ジュリア集合の補集合における線形化写像と臨界値を用いて、パラメータ空間内のマンデルブロー集合の補集合に自然な極座標を導入する点にあった。ところがエノン写像は微分同相写像なので、上に述べた様な構成を適用する事は不可能であった。そこで申請者は新しいアイデアとして、相空間からパラメータ空間への群作用同士の対応に注目することで新しい対応関係を構築することを目標とする。

またさらに以上に述べた手法を、実エノン写像の力学系的性質やそのパラメータ空間の構造の解析へと応用することも目標の一部とする。

3. 研究の方法

具体的な研究手法として、以下の三つのステップを考える。

(1) 第一に、二つの Hubbard tree の間に「ホモトピー・シフト同値性」の概念を導入し、位相共役不変量を抽出する。つまり、二つの Hubbard tree に対してそれぞれの帰納極限上のシフト写像が位相共役なら、もとの Hubbard tree 同士が力学系の意味でホモトピー・シフト同値である事を証明する。

(2) 次に、この位相共役不変量を IMG 作用の固定点集合と対応付け、更にホースシュー・モノドロミー作用の固定点集合と結び付ける。少なくとも実エノン写像の場合には、研究分担者の荒井迅氏による最近の結果で、ニーディング列の対応物がホースシュー・モノドロミーの固定点集合と一致することが示された。この結果をもとにして、より一般の双曲的エノン写像の場合に IMG 作用の固定点集合やホースシュー・モノドロミー作用の固定点集合との対応を証明する。

(3) 最後に、ホースシュー・モノドロミー作用の固定点集合同士を比較することで、パラメータ空間内の分岐現象に関する大域的構造の解明を行なう。中でも、1 変数 2 次多項式族に対する双曲的成分がエノン写像のパラメータ空間へどのように延長されているか、どの双曲的成分同士はパラメータ空間内で隣り合っているか、またその隣り合い方のルールは何か、等について解析を行なう。

4. 研究成果

(1) Ishii, Yutaka, Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 III: Iterated monodromy groups. *Adv. Math.* 255 (2014), 242–304.

において、われわれはエノン写像に対してその Hubbard tree を出発点として iterated monodromy group と呼ばれる群作用のアナロジーを定義することに成功した。これは Nekrashevych が拡大的な力学系に対して展開した理論の双曲的なケースへの初めての拡張になっている。エノン写像の場合にはその定義には 2 つの群作用が必要で、一つは不安定方向を記述する IMG 的な群作用と安定方向を記述するホロノミー群的な群作用のある種の積として得られる inverse semi-group として定式化される。特にその帰結として、ジュリア集合と IMG の群作用の極限集合が同型になることを証明し、さらに対応するオートマトンがジュリア集合の組み合わせ論的性質を完全に復元することを証明した。

(2) Ishii, Yutaka, Dynamics of polynomial diffeomorphisms of C^2 : Combinatorial and topological aspects. *Arnold Math. J.* 3 (2017), no. 1, 119–173. においては、エノン写像のパラメータ空間におけるモノドロミー群作用に関するモノドロミー予想について考察を加えた。これはそもそも Chris Lipa の博士論文において議論されていたが、本論文ではその内容を厳密に定式化し直した。

(3) Himeki Yutaro, Ishii Yutaka, M_4 is regular-closed. To appear in *Ergodic Theory and Dynamical Systems* (2018).

では高い対称性をもつアフィン写像からなる反復関数系のパラメータ空間におけるマンデルブロー集合が正則閉になることを証明した。これは関数の数が4の場合のみ未解決問題として知られていたが、今回 Calegari-Koch-Walker の手法を応用することで、関数の数が4以上の場合すべてに通用する統一的で幾何的にシンプルな証明を見出した。

(4) Arai Zin, Ishii Yutaka, On parameter loci of the Henon family. To appear in *Communications in Mathematical Physics* (2018). では実エノン写像のパラメータ空間における双曲的ホースシュー領域や最大エントロピー領域に関する顕著な結果を得た。具体的には、これらの領域がパラメータ空間の b -軸から c -軸への実解析的関数によって特徴付けられることを証明した。これはおよそ30年前に数値実験で観察されて以来の未解決問題であった。特にこの主結果の帰結として、上述の2つのパラメータ領域が連結かつ単連結になることが従う。これはある意味でエノン写像のエントロピーがその最大値においてある種の単調性を持つことを示している。

(5) Arai Zin, Ishii Yutaka, Hiroki Takahasi, Boundary of the horseshoe locus for the Henon family. To appear in *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* (2018).

では、上記 (iv) で展開した手法のエルゴード論なおうようについて考察した。特にパラメータ空間において良く知られたシュヴァルツの補題と精度保証計算を巧妙に組み合わせることで、ホースシュー領域の境界を記述する関数の傾きを評価した。これと高橋の結果を組み合わせることで、ホースシュー領域の境界に対応したエノン写像の不変測度に関して変分原理的な特徴付けが可能になった。またさらにこの手法を拡張して、ホースシュー領域の境界を記述する関数が $b > 0$ の部分と $b < 0$ の部分それぞれで単調になることも証明した。

5 . 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 11 件)

1 Arai Zin, Ishii Yutaka, Hiroki Takahasi, Boundary of the horseshoe locus for the Henon family. 査読有, To appear in *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* (2018). DOI not yet assigned.

2 Arai Zin, Ishii Yutaka, On parameter loci of the Henon family. 査読有, To appear in *Commun. Math. Phys* (2018). DOI: 10.1007/s00220-018-3174-0

3 Himeki Yutaro, Ishii Yutaka, M_4 is regular-closed. 査読有, To appear in *Erg. Th. Dyn. Syst.* (2018). <https://doi.org/10.1017/etds.2018.27>

4 Ishii, Yutaka, Dynamics of polynomial diffeomorphisms of C^2 : Combinatorial and topological aspects. 査読有, *Arnold Math. J.* 3 (2017), no. 1, 119–173. <https://doi.org/10.1007/s40598-017-0066-x>

5 Asaoka, Masayuki, Shinohara, Katsutoshi, Turaev, Dmitry, Degenerate behavior in non-hyperbolic semigroup actions on the interval: fast growth of periodic points and universal dynamics. 査読有, *Math. Ann.* 368 (2017), no. 3-4, 1277–1309. <https://doi.org/10.1007/s00208-016-1468-0>

6 Asaoka, Masayuki, Abundance of fast growth of the number of periodic points in 2-dimensional area-preserving dynamics. 査読有, *Commun. Math. Phys.* 356 (2017), no. 1, 1–17. <https://doi.org/10.1007/s00220-017-2972-0>

7 Arai, Zin, On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map and their monodromies. 査読有, *Phys. D* 334 (2016), 133–140. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.02.006>

8 Asaoka, Masayuki, Irie, Kei,
A C^∞ closing lemma for
Hamiltonian diffeomorphisms of closed
surfaces. 査読有,
Geom. Funct. Anal. 26 (2016), no. 5,
1245–1254.
<https://doi.org/10.1007/s00039-016-0386-3>

9 Asaoka, Masayuki.
Local rigidity of homogeneous actions of
parabolic subgroups of rank-one Lie
groups. 査読有,
J. Mod. Dyn. 9 (2015), 191–201.
doi: 10.3934/jmd.2015.9.191

10 Asaoka, Masayuki, Fukaya,
Tomohiro, Mitsui, Kentaro, Tsukamoto,
Masaki, 査読有,
Growth of critical points in
1-dimensional lattice systems.
J. Anal. Math. 127 (2015), 47–68.
<https://doi.org/10.1007/s11854-015-0023-3>

11 Ishii, Yutaka,
Hyperbolic polynomial diffeomorphisms
of C^2 III: Iterated monodromy groups.
査読有,
Adv. Math. 255 (2014), 242–304.
<https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.12.031>

〔学会発表〕(計 7 件)

1 Ishii, Yutaka,
“ M_4 is regular-closed”
RIMS workshop on complex dynamics,
December 11-15, 2017, RIMS at Kyoto
University, Kyoto, Japan

2 Ishii, Yutaka,
“On parameter loci of the Henon family”
FoCM2017,
July 10-19, 2017, Universitat de Barcelona,
Barcelona, Spain.

3 Ishii, Yutaka,
“Boundary of the horseshoe locus for the
Henon family” Ergodic theory workshop,
November 23-25, 2016, Tsukuba University,
Tsukuba, Japan

4 Ishii, Yutaka,
“On parameter loci of the Henon family”
Dubrovnik VIII - Geometric Topology,
Geometric Group Theory & Dynamical
Systems,
June 22-26, 2016, Inter-University Centre,

Dubrovnik, Croatia

5 Ishii, Yutaka,
“On parameter loci of the Henon family”
School and Conference on Dynamical
Systems, July 20-August 7, 2016, ICTP,
Trieste, Italy

6 Ishii, Yutaka,
“Boundary of the horseshoe locus for the
Henon family”
RIMS workshop on complex
dynamics, December 12-16, 2016, RIMS at
Kyoto University, Kyoto, Japan

7 Ishii, Yutaka,
“Tight automata”
Workshop on Symbolic Dynamics and
Related Topics, October 23, 2015,
Hiroshima University, Higashi Hiroshima,
Japan

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1)研究代表者
石井 豊 (ISHII, Yutaka)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：20304727

(2)研究分担者
浅岡 正幸 (ASAOKA, Masayuki)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10314832

荒井 迅 (ARAI Zin)
中部大学・創発学院・教授
研究者番号：80362432

(3) 連携研究者 ()
研究者番号：

(4) 研究協力者 ()