

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25287025

研究課題名(和文) 変分的手法による非線形楕円型方程式の大域的解析

研究課題名(英文) Variational study of nonlinear elliptic problems

研究代表者

田中 和永 (Tanaka, Kazunaga)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20188288

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,100,000円

研究成果の概要(和文)：変分的手法によるアプローチにより、非線形楕円型方程式の研究を行った。特に特異摂動問題を重視し、極限方程式に対して解の一意性、非退化性が保証できない場合—Lyapunov-Schmidt法が適用できない場合—にも適用可能な変分的方法を見だし種々の問題に対して凝集解の存在を示した。またスケールリングによる不変性に注目することにより、楕円型問題に対する新しい変分のアプローチを与えた。

研究成果の概要(英文)：Via variational approach, we study nonlinear elliptic problems. In particular, we develop a new variational approach and we construct concentrating solutions for several singular perturbation problems, where uniqueness and non-degeneracy of solutions of limit problems are not known and the Lyapunov-Schmidt reduction method is not applicable. We also introduce new variational approaches based on the scaling properties the problems, which enable us to study ground states and other solutions for several nonlinear elliptic equations and systems.

研究分野：解析学

キーワード：変分問題 非線形楕円型方程式 特異摂動問題 ミニマックス法

1. 研究開始当初の背景

変分構造を伴った微分方程式(系)は数理物理、数理生物学等におけるいろいろなモデルあるいは微分幾何学に現れ、もっとも重要な非線形問題のクラスのひとつである。変分構造をもつ微分方程式の解は対応する汎関数の臨界点として特徴付けられ、汎関数の最小点あるいは極小点に相当する解の存在問題の解析的研究は長い歴史をもつ。しかし鞍点に相当する解の存在問題の研究は比較的最近 Ambrosetti-Rabinowitz らにより始まり、ミニマックス法が整備されて依頼、飛躍的進歩をみている。研究代表者は学位を得て以来、変分法を中心に研究を続けており、ハミルトン形の周期解、ホモクリニック解の存在問題、非線形スカラーフィールド方程式に対する正值解の多重性等を研究してきたが、2004年以降は非線形楕円型方程式に対する特異摂動問題を研究しており、極限方程式の解の一意性、非退化性を要求しない特異摂動解の変分的構成等に成功している。

2. 研究の目的

(1) 特異摂動問題

特異摂動問題は本研究の主要なテーマであり、数理物理、数理生物モデル等とも深い関連をもつ。次のトピックに焦点を当てた。

(1-a) 変分的な凝集解の構成

非線形シュレディンガー方程式に対する特異摂動問題は Floer-Weinstein の 1986 年の仕事以降、多くの研究者により非常に多くの研究がなされてきた。特に非線形項がべき関数のとき極限方程式の正值解は平行移動を除いて一意かつ非退化であることを用いて Lyapunov-Schmidt 法を用いることによりポテンシャル関数の臨界点に凝集する解の構成が行われている。Byeon-Jeanjean により始まった極限方程式の解の一意性、非退化性を仮定せずに凝集解の存在を構成する変分的方法を研究代表者は J. Byeon 氏と共に発展させ、それまで極小点での凝集のみが可能であった変分的方法を鞍点等にも適用可能としている。ここで用いられているアイデアの広いクラスの問題への適用を考え、特に方程式系への応用を目指した。

(1-b) 高振動解

空間次元が 1 の場合にはより高いエネルギーをもつ adiabatic jump を伴う高振動解の構成を振り子の問題等に対して取り組んだ。

(2) 非線形楕円型方程式(系)に対する解構造の研究

特に (i) 数理物理、数理生物モデルにおける定常解(特に基底状態)の存在問題、(ii) 非線形楕円型方程式の解の安定性、不安定性を中心として非線形楕円型方程式の研究に取り組んだ。

(3) 変分構造を持たない非線形楕円型方程式の研究

楕円型方程式が変分構造を持たない場合でも、変分構造をもつ方程式からの摂動としてとらえることにより、大域的な解析が可能となる場合がある。ここでは、そのような例として臨界増大度をもつ gradient 項を含む問題に対して大域的解析を試みた。

3. 研究の方法

次の役割分担の下で研究を行った。

- (1) 特異摂動問題の研究: 田中, 生駒, 佐藤
- (2) 非線形楕円型方程式(系)の研究: 田中, 小澤, 大谷, 足達, 倉田, 塩路
- (3) 変分構造を持たない楕円型方程式の研究: 田中, 山田, 兼子

テーマ (1) に関しては J. Byeon 氏, L. Jeanjean 氏との共同研究を重視した。なお、研究を遂行する上で非常に重要な実解析的手法については小園氏よりサポートを受けた。

4. 研究成果

(1) 特異摂動問題

J. Byeon 氏と共に開発した極限問題の解の一意性、非退化性を要求しない変分的方法を発展させることにより、代表者は J. Byeon 氏と共に種々の問題に適用を行った。従来は非線形シュレディンガー方程式に対して極小点における凝集解の構成が主に行われていたが、極大点をはじめとする臨界点での凝集現象を見いだすと共に clustering 解の存在証明に成功した。またチューブ状領域の幅を一定に保ったまま拡張した領域での非線形楕円型方程式を考え正值解の多重度を考え、領域の拡張と共に個数は無限大に発散することを示すことに成功した。この問題は領域に関する特異摂動問題とみることができ、極限問題の解の非一意性、退化が自然に生じ、Lyapunov-Schmidt 法の適用は望めず、変分法によるアプローチが非常に有効であることを端的に示すよい例となっている。

他の特異摂動問題としては、非線形シュレディンガー方程式および磁場効果を持つ非線形シュレディンガー方程式に対して、ポテンシャル関数の臨界点集合が位相的に豊かな構造をもつときに、その位相的状況と凝集解の多重度の関連の研究を代表者は S. Cingolani 氏, L. Jeanjean 氏と共にを行った。従来このような問題では Nehari 多様体上に問題が帰着できる場合が主に扱われていたが、スケーリングに関する性質を重視することにより、Nehari 多様体上に問題を帰着することなく非常に一般的な非線形性をもつ方程式に対して多重度を示すことに成功した。その際、相対 cup-length が有効に用いられ、臨界点集合の cup-length により、凝集解の個数は評価される。

また、高振動解の構成問題については代表者は P. Felmer 氏らと共に振り子の運動方程式に対して adiabatic jump を伴う興味ある解の構成に成功した。

(2) 非線形楕円型方程式(系) に対する解構造の研究

代表者は C.-N. Chen 氏と共に全領域における FitzHugh-Nagumo 方程式をスケールリング性を重視して変分法による新しいアプローチを行い、従来の存在結果の改良に成功した。また代表者は分担者の小澤氏および林氏と共に 2 次の相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系についてコーシー問題を考えると共に、基底状態に対応する定常解を変分法により求めることに成功した。また代表者は log 型の非線形性を伴う非線形シュレディンガー方程式に対して multi-bump 解の構成を C. Zhang 氏と共に成功している。この問題は log のもつ特異性ゆえに通常のソボレフ空間では定式化できないという技術的難しさを持っているが、周期関数の空間を巧妙に用いることにその困難さを回避している。

また分担者の小澤氏は半相対論的非線形ハートリー方程式の基底状態の存在の証明、非線形分数冪シュレディンガー方程式の定在波の軌道安定性の証明に成功した。

また連携研究者の足達氏は相対変分構造をもつ準線形楕円型方程式について、可解性(特にエネルギー最小解の存在)、一意性およびパラメーターを変化させた際の解の漸近挙動に関する精緻な結果を得た。

連携研究者の佐藤氏は 3 つの方程式からなる連立非線形楕円型方程式について、引力的および斥力的な 2 種の相互作用を同時に含む複雑な場合を Z.-Q. Wang 氏と共に扱い、正值解の存在を示すと共に、その定性的な性質の研究を行った。

また連携研究者の生駒氏は分数冪作用素を伴う非線形楕円型方程式をスケールリング則をみださない場合に扱い、最小エネルギー解の存在および加算個の解の存在を示すことに成功している。また連携研究者の倉田氏は FitzHugh-Nagumo 方程式に対する定常問題を扱い、最小化解の安定性および方程式に現れるパラメータを変化させた際のエネルギーの変化に関する精密な評価を得た。また連携研究者の塩路氏は非線形楕円型方程式の正值球対称解の一意性を非常に一般的な条件の下で示し、さらにその結果を球面上あるいは双曲空間上の Brezis-Nirenberg 問題に応用をした。

(3) 変分構造を持たない非線形楕円型方程式の研究

代表者は D. Arcaya 氏, De Coster 氏, L. Jeanjean 氏と共に gradient 項に関して臨界増大度をもつ方程式に取り組み、分岐構造を明らかにすることに成功した。このよ

うな問題に関しては順序構造を用いたアプローチが従来行われていたが、変分構造をもつ方程式に変数変換により移すことにより、順序構造による議論が難しい場合を扱うことに成功している。

また連携研究者の生駒氏は球対称性をもつ完全非線形楕円型作用素に対して固有値問題を扱い、球対称な固有値、固有関数の列の存在とその完全性を示すと共に、固有値の様々な特徴付けを与えた。

(4) その他の結果

研究代表者は G. Jiang 氏, C. Zhang 氏共に sublinear な楕円型方程式を扱う際に重要な Clark の定理を扱い、その臨界点集合の構造定理を与えた。さらに Clark の定理の仮定の下で一般に信じられていたの臨界点集合に関する予想を考察し、反例を与えることに成功した。

また連携研究者の生駒氏は Willmore 型曲面の存在問題を扱い、最小化法、最大化法およびモース理論を用いた証明を行った

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 43 件)

1. S. Machihara, T. Ozawa, H. Wadade, Remarks on the Hardy type inequalities with remainder terms in the framework of equalities, Adv. Studies Pure Math., (in press). 査読有
2. Y. Kaneko, Y. Yamada, Spreading speed and profiles of solutions to a free boundary problem with Dirichlet boundary conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 印刷中, 査読有 DOI:10.1016/j.jmaa.2018.05.056
3. T. Kajiwara, K. Kurata, On a Variational Problem Arising from the Three-component FitzHugh-Nagumo Type Reaction-Diffusion Systems, Tokyo J. Math. advance publication, 査読有 <https://projecteuclid.org/euclid.tjm/1513566017>.
4. K. Tanaka, C. Zhang, Multi-bump solutions for logarithmic Schrodinger equations, Calc. Var. Partial Differential Equations 56 (2017), no. 2, Art. 33, 35. 査読有 DOI 10.1007/s00526-017-1122-z
5. S. Cingolani, L. Jeanjean, K. Tanaka, Multiple complex-valued solutions for nonlinear magnetic Schrodinger equations, J. Fixed Point Theory Appl. 19 (2017), no. 1, 37--66. 査読有 DOI 10.1007/s11784-016-0347-3

6. G. Jiang, K. Tanaka, C. Zhang, Remarks on the Clark theorem, *J. Nonlinear Convex Anal.* 18 (2017), no. 8, 1421--1434. 査読有
7. J. Bellazzini, T. Ozawa, N. Visciglia, Ground states for semi-relativistic Schrödinger-Poisson-Slater energy, *Funkcialaj Ekvacioj*, 60 (2017), 353-369. 査読有
8. S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Global uniqueness results for ground states for a class of quasilinear elliptic equations, *Kodai Math. J.* 40 (2017), 117--142. 査読有
9. N. Ikoma, Existence of solutions of scalar field equations with fractional operator, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, March 2017, Volume 19, Issue 1, pp 649-690. 査読有 DOI: 10.1007/s11784-016-0369-x
10. N. Ikoma, Erratum to: Existence of solutions of scalar field equations with fractional operator, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19 (2017), no. 2, 1649-1652. 査読有 DOI: doi.org/10.1007/s11784-017-0427-z
11. N. Ikoma, A. Malchiod, A. Mondino, Embedded area-constrained Willmore tori of small area in Riemannian three-manifolds II: Morse Theory *American Journal of Mathematics* 139 (2017), no. 5, 1315-1378. 査読有 DOI: 10.1353/ajm.2017.0033
12. N. Ikoma, A. Malchiod, A. Mondino, Embedded area-constrained Willmore tori of small area in Riemannian three-manifolds I: minimization. *Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series* 115 (2017), no. 3, 502-544. 査読有 DOI: 10.1112/plms.12047
13. J. Byeon, Y. Sato, Z.-Q. Wang, Pattern formation via mixed interactions for coupled Schrödinger equations under Neumann boundary condition. *J. Fixed Point Theory Appl.* 19 (2017), no. 1, 559-583. 査読有 DOI: 10.1007/s11784-016-0365-1
14. N. Ioku, M. Ishiwata, T. Ozawa, Sharp remainder of a critical Hardy inequality, *Archiv der Mathematik*, 106 (2016), 65-71. 査読有 DOI: 10.1007/s00013-015-0841-7
15. J. Bellazzini, M. Ghimenti, T. Ozawa, Sharp lower bounds for Coulomb energy, *Math. Research Letters*, 23 (2016), 621-632. 査読有 <http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n3.a2>
16. Y. Yamada, Nonlinear diffusion equations with cross-diffusion: Reaction-diffusion equations appearing in mathematical ecology, *Sugaku Expositions Vol. 29* (2016), No.2, pp.121-144. 査読有
17. J. Byeon, Y. Sato, Z.-Q. Wang, Pattern formation via mixed attractive and repulsive interactions for nonlinear Schrödinger systems *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, (9) 106 (2016) no.3 477-511 査読有 DOI: 10.1016/j.matpur.2016.03.001
18. S. Jimbo, K. Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, *Indiana Univ. Math. J.*, 65(2016), pp.867--898. 査読有 10.1512/iumj.2016.65.5831
19. N. Shioji, K. Watanabe, Uniqueness and nondegeneracy of positive radial solutions of $\operatorname{div}(u) + (-\Delta u)^p = 0$ *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 55 (2016), article no. 32. 査読有
20. D. Arcoya, C. De Coster, L. Jeanjean, K. Tanaka, Continuum of solutions for an elliptic problem with critical growth in the gradient, *J. Funct. Anal.* 268 (2015), no. 8, 2298--2335. 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2015.01.014>
21. S. Cingolani, L. Jeanjean, K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrödinger equations concentrating at a potential well, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 53 (2015), no. 1-2, 413--439. 査読有 DOI 10.1007/s00526-014-0754-5
22. Y. Yamada, On logistic diffusion equations with nonlocal interaction terms, *Nonlinear Analysis*, Vol. 118 (2015), pp. 51-62, 査読有 DOI:10.1016/j.na.2015.01.016
23. T. Suzuki, Y. Yamada, Global-in-time behavior of Lotka-Volterra system with diffusion, *Indiana University Mathematics Journal*, Vol.64, No.1 (2015), pp. 181-216, 査読有 DOI: 10.1512/iumj.2015.64.5460
24. N. Ikoma, H. Ishii, Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls, II. *Bulletin of Mathematical Sciences* 5 (2015), 451-510. 査読有 DOI: 10.1007/s13373-015-0071-0
25. Y. Sato, Z.-Q. Wang, On the least energy sign-changing solutions for a

- nonlinear elliptic system, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 35, no. 5 2151--2164 (2015). 査読有 DOI: 10.3934/dcds.2015.35.2151
26. Y. Sato, Z.-Q. Wang, Least energy solutions for nonlinear Schrodinger systems with mixed attractive and repulsive couplings, *Adv. Nonlinear Stud.* 15, 1--22 (2015). 査読有 DOI: 10.1515/ans-2015-0101
27. Y. Sato, Z.-Q. Wang, Multiple positive solutions for Schrodinger systems with mixed couplings, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54, no.2 (2015), 1373--1392. 査読有 DOI: 10.1007/s00526-015-0828-z
28. N. Shioji, K. Watanabe, Uniqueness of positive solutions of Brezis-Nirenberg problems on H^n Linear and nonlinear analysis, 1 (2015), 261-270. 査読有
29. S. Secchi, N. Shioji, M. Squassina, Coron problem for fractional equations, *Differential Integral Equations*, 28 (2015), 103-118. 査読有
30. S. Mosconi, N. Shioji, M. Squassina, Nonlocal problems at critical growth in contractible domains, *Asymptotic analysis*, 95 (2015), 79-100. 査読有
31. C.-N. Chen, K. Tanaka, A variational approach for standing waves of FitzHugh--Nagumo type systems, *J. Differential Equations* 257 (2014), no. 1, 109--144. 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2014.03.013>
32. J. Byeon, K. Tanaka, Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 50 (2014), no. 1-2, 365--397. 査読有 DOI 10.1007/s00526-013-0639-z
33. D. Arcoya, C. De Coster, L. Jeanjean, K. Tanaka, Remarks on the uniqueness for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 420 (2014), no. 1, 772--780. 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.06.007>
34. Y. Cho, H. Hajaiej, G. Hwang, T. Ozawa, On the orbital stability of fractional Schrodinger equations, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 13 (2014), 1267-1282. 査読有 DOI:10.3934/cpaa.2014.13.1267.
35. M. Otani, Y. Staicu, Existence results for quasilinear elliptic equations with multivalued nonlinear terms, *Set-valued and Variational Analysis*, 22, 859--877 (2014). 査読有 10.1007/s11228-014-0289-9.
36. S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Blow up phenomena and asymptotic profiles of ground states of quasilinear elliptic equations with H^1 -supercritical nonlinearities, *J. Differential Equations* 256 (2014), 1492--1514. 査読有
37. S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities, *Commun. Pure Appl. Anal.* 13 (2014), 97--118. 査読有
38. Y. Sato, M. Shibata; Existence of a positive solution for nonlinear Schrödinger equations with general nonlinearity, *Adv. Nonlinear Anal.* 3 (S1) s55--s67 (2014). 査読有 DOI: 10.1515/anona-2014-0003
39. P. Felmer, A. de Laire, S. Martinez, K. Tanaka, High energy rotation type solutions of the forced pendulum equation, *Nonlinearity* 26 (2013), no. 5, 1473--1499. 査読有 doi:10.1088/0951-7715/26/5/1473
40. N. Hayashi, T. Ozawa, K. Tanaka, On a system of nonlinear Schrodinger equations with quadratic interaction, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* 30 (2013), no. 4, 661--690. 査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.10.007>
41. J. Byeon, K. Tanaka, Semi-classical standing waves for nonlinear Schrodinger equations at structurally stable critical points of the potential, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 15 (2013), no. 5, 1859--1899. 査読有 DOI 10.4171/JEMS/407
42. J. Byeon, K. Tanaka, Semiclassical standing waves with clustering peaks for nonlinear Schrödinger equations, *Moires of the American Mathematical Society*, 229, no. 1076 (2013). 査読有 DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/memo/1076>
43. N. Shioji and K. Watanabe, A generalized Pohozaev identity and uniqueness of positive radial solutions of $u+g(r)u+h(r)u^p=0$ *Journal of differential equations*, 255 (2013), 4448-4475. 査読有

[学会発表](計 12 件)

1. K. Tanka, Singular perturbation problems for generalized Choquard

- equations, the third congress of PRIMA, Oaxaca, Mexico, 2017.
2. 田中和永, Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrodinger equations concentrating at a potential well, Workshop on nonlinear partial differential equations and related topics, 石川県文教会館, 2016.
 3. K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrodinger equations concentrating at a potential well, Workshop on nonlinear PDEs and calculus of variations, Tianjin, China, 2016.
 4. K. Tanaka, Nonlinear elliptic problems in singularly perturbed cylindrical domains, Asymptotic patterns in variational problems: PDE and geometric aspect, Oaxaca, Mexico, 2016.
 5. K. Tanaka, Domain shape and multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic equations, the first Japan-Taiwan joint conference of differential geometry, Waseda University, 2016.
 6. 田中和永, 非線形楕円型方程式に対する特異摂動問題 特に退化する場合を巡って, 日本数学会, 関数方程式分科会, 特別講演, 2016.
 7. K. Tanaka, A new deformation method for singular perturbation problems and applications, 3rd Chile-Japan workshop on nonlinear PDEs, 大阪大学, 2015.
 8. K. Tanaka, Singular perturbation problems for nonlinear elliptic problems, Workshop in nonlinear PDEs, Universite Libre de Bruxelles, Brussels, 2015.
 9. K. Tanaka, Singular perturbation problems for NLS systems and nonlinear elliptic problems in perturbed cylindrical domains, Variational and topological methods in the study of nonlinear problems, Besancon, France, 2015.
 10. K. Tanaka, Singularly perturbed nonlinear elliptic problems in expanding tubular type domains, the 10 th AMS conference on dynamical systems, differential equations and applications, Madrid, Spain, 2014..
 11. K. Tanaka, Singular perturbation problems for nonlinear elliptic equations in expanding tubular type domains and NLS systems, NCTS workshop on calculus of variations and related topics, National Tsing-Hua University, Taiwan, 2014.
 12. K. Tanaka, Multi-peak solutions for

singularly perturbed elliptic problems, Workshop on nonlinear PDE, Tianjin, China, 2013.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 和永 (TANAKA, Kazunaga)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20188288

(2) 研究分担者

小澤 徹 (OZAWA, Tohru)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70204196

大谷 光春 (OTANI, Mitsuharu)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：30119656

山田 義雄 (YAMADA, Yoshio)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：20111825

小園 英雄 (KOZONO, Hideo)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：00195728

(3) 連携研究者

足達 慎二 (ADACHI, Shinji)
静岡大学・工学部・教授
研究者番号：40339685

生駒 典久 (IKOMA, Norihisa)
金沢大学・理学部・准教授
研究者番号：50728342

佐藤 洋平 (SATO, Yohei)
埼玉大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：00465387

倉田 和浩 (KURATA, Kazuhiro)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：10186489

塩路 直樹 (Shioji, Naoki)
横浜国立大学・工学研究院・教授
研究者番号：50215943

兼子 裕大 (KANEKO, Yuki)
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：40773916

(4) 研究協力者

平田 潤 (Hirata, Jun)