

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25289111

研究課題名(和文) フィードバック通信符号化の理論限界と新しい符号化法に関する研究

研究課題名(英文) Study on the coding schemes for channel coding with feedback

研究代表者

山本 博資 (Yamamoto, Hirotsuke)

東京大学・大学院新領域創成科学研究科・教授

研究者番号：30136212

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,300,000円

研究成果の概要(和文)：無雑音フィードバック通信路が利用できる場合に、離散無記憶通信路に対して最も大きな復号誤り指数(信頼性関数)を達成できるYamamoto-Itoh(YI)方式と、ガウス雑音通信路に対して高性能な通信を行える事後マッチング(Posterior Matching, PM)方式が知られている。これらに対して、次の拡張を行った。YI方式を有雑音フィードバック通信路に拡張した。また、YI方式およびPM方式をマルチユーザ通信路に拡張した。さらに、複数人を同時に同定する同定符号化法を、無雑音フィードバック通信路が利用できる場合に拡張した。それぞれの場合に対して符号化・復号化法を提案し、符号化定理を証明した。

研究成果の概要(英文)：In the case that a noiseless feedback channel can be used, the Yamamoto-Itoh (YI) scheme and the Posterior Matching (PM) scheme can attain high performance for discrete memoryless channels and Gaussian-noise channels, respectively. In this study, the YI scheme is extended to the case of noisy feedback channels, and the YI and PM schemes are extended to the cases of multi-user channels (multi-access channels, broadcast channels, interference channels) with noiseless feedback channels. Furthermore, identification coding for multiple objects are also extended to the case with noiseless feedback channels. For each case, a devised coding scheme is proposed, and the coding theorems are proved to clarify the performance of the proposed schemes.

研究分野：情報理論

キーワード：フィードバック通信 Yamamoto-Itoh通信方式 事後マッチング方式 同定符号化 多ユーザ通信

## 1 研究開始当初の背景

多くの通信路では双方向に通信することができる。しかし、携帯電話では、携帯電話から基地局に送信するときの電力比べて、基地局から携帯電話に送信するときの電力は非常に大きくでき、前者の通信路に比べて後者の通信路のSN比は非常に大きいため、相対的に雑音の少ない通信路となる。雑音の小さな逆方向通信路(フィードバック通信路)を用いて、雑音の大きな順方向通信路の復号誤り特性を改善する通信方式を、フィードバック通信という。

フィードバック通信に関して数多くの研究[1]がなされているが、その中で重要な成果として下記のことが知られている。フィードバック通信路に雑音がない理想なとき、順方向通信路が離散無記憶通信路の場合に達成可能な最も大きな復号誤り指数(信頼性関数)はBurnashevの誤り指数[2]であり、その誤り指数を達成するシンプルな通信方式としてYamamoto-Itoh方式[3]が知られている。また、順方向通信路がガウス雑音通信路の場合には、事後マッチング(Posterior Matching)を利用する高性能な通信方式[4]が知られている。

ここで、Yamamoto-Itoh方式のYamamotoは研究代表者の山本博資であり、Burnashevは研究協力者(海外共同研究者)のMarat V. Burnashevである。

また、雑音のある通信路を通して、多くの受信者に同定情報を送信する同定符号化に関して、フィードバック通信路が利用できる場合の同定符号化について研究がなされている[5]。

## 2 研究の目的

本研究では、無雑音フィードバック通信方式として重要なYamamoto-Itoh方式(YI方式)[3]と事後マッチング方式[4]を、より一般の通信路に拡張することを目的としている。一つ目の拡張は、YI方式をフィードバック通信路に雑音が存在する場合に拡張することであり、二つ目の拡張は、YI方式および事後マッチング方式を、マルチユーザ通信路(多重アクセス通信路、放送型通信路、干渉通信路など)に拡張することである。具体的は、フィードバック通信路に雑音がある場合やマルチユーザ通信路の場合に適用できるように、YI方式や事後マッチング方式の通信プロトコルを拡張すると共に、その拡張プロトコルの性能を情報理論的に評価することを目的としている。

さらに、同定符号化に関して従来研究されていたのは、多くの受信者の中から一人だけを同定する場合であるが、一度に多人数を同定する同定符号化でフィードバック通信路が利用できる場合に関して、効率のよい具体的な符号化法を与えることを目的としている。

## 3 研究の方法

本研究では、(A)YI方式(Yamamoto-Itoh方式)の有雑音フィードバック通信路への拡張、(B)YI方式のマルチユーザ通信路への拡張、(C)事後マッチング方式のマルチユーザ通信路への拡張、(D)多人数を一度に同定する同定符号化法のフィードバック通信路が利用できる場合への拡張を行っている。

これらは全て理論的な研究であるため、研究協力者との議論を通じて理論の構築を行った。また、得られた成果を国内外のシンポジウム等で発表すると共に他の研究者と議論を行うことで、理論に誤りがなければ確認し、最終的な成果を学術論文誌に発表している。

なお、(A)(B)(C)(D)の研究は、それぞれ研究協力者のM. V. Burnashev(ロシア科学アカデミー情報伝送問題研究所)、原慎太郎(研究代表者の当時の大学院生)、L. V. Troung(国立シンガポール大学大学院生)、上田真士(研究代表者の当時の大学院生)との共同研究として実施した。

## 4 研究成果

### (A)YI方式の有雑音フィードバック通信路への拡張

順方向通信路の入力 $x_i$ 、順方向通信路の出力(=フィードバック通信路の入力) $y_i$ 、フィードバック通信路の出力 $z_i$ が下記の関係を満たすとする。

$$y_i = x_i + \xi_i \quad (1)$$

$$z_i = y_i + \sigma\eta_i \quad (2)$$

ここで、 $\xi_i$ と $\eta_i$ は互いに独立な標準正規分布を持つガウス雑音とし、 $\sigma > 0$ はフィードバック通信路の雑音の強さを表すパラメータである。また、符号のブロック長 $n$ に対して順方向通信路の電力制限を

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = A \quad (3)$$

とする。符号語数 $M$ のときの、誤り訂正符号の復号誤り確率を $P_e(M, A, \sigma, n)$ とすると、復号誤り指数(信頼性関数) $E(A, \sigma)$ は次式で定義される。

$$E(A, \sigma) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{P_e(M, A, \sigma, n)} \quad (4)$$

このとき、次の定理が成り立つ。

**定理 1**  $M = o(n)$  (つまり符号化レート $R$ がゼロ)の場合、文献[5][7]<sup>1</sup>で提案した2段階符号化<sup>2</sup>を行うと、次の誤り指数を達成できる。

$$E(A, \sigma) \geq \frac{A(1 - \sigma^2)}{3} \quad (5)$$

<sup>1</sup>[5]は、5節「主な発表論文等」の⑤に示した論文を意味する。  
<sup>2</sup>符号化および復号化の詳細は[5][7]を参照すること。

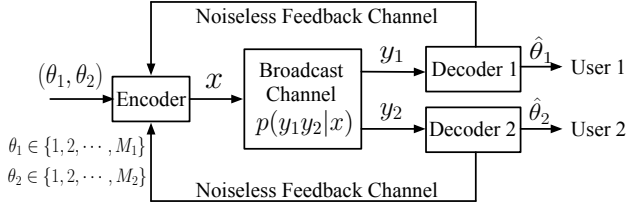


図 1: 無雑音フィードバック通信路を伴う放送型通信路

フィードバック通信路が存在しない場合で  $M = o(n)$  の場合の復号誤り指数は  $M/4$  で与えられるため、 $\sigma$  が小さい場合、フィードバック通信路を利用する 2 段階通信方式を用いることで、復号誤り指数を約 33% 改善できることがわかる。また、 $\sigma^2 < 1/4$  の場合は、有雑音フィードバック通信路を用いることで復号誤り指数を改善できる。

### (B) YI 方式のマルチユーザ通信路への拡張

図 1 で与えられるような無雑音フィードバック通信路を利用できる離散無記憶放送型通信路  $p(y_1 y_2 | x)$  を考える。受信者 (User)  $l$ ,  $l = 1, 2$ , に伝送する情報を  $\theta_l$  とし、 $\theta_l$  は  $M = \{1, 2, \dots, M_l\}$  上で一様分布をし、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は、互いに確率的に独立とする。また、 $\theta_l$  の復号値を  $\hat{\theta}_l$  で表す。このとき、符号長  $n$  に対する受信者  $l$  の復号誤り確率  $P_l^{(e)}$ , 符号化レート  $R_l$ , 復号誤り指数  $E_l(R_1, R_2)$  を次式で定義する。

$$P_l^{(e)} = \Pr\{\hat{\theta}_l \neq \theta_l\} \quad (6)$$

$$R_l = \frac{\log M_l}{n} \quad (7)$$

$$E_l(R_1, R_2) = \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log P_l^{(e)}}{n} \quad (8)$$

また、与えられた符号化方式と符号化レート対  $(R_1, R_2)$  に対して、達成可能な復号誤り指数領域  $\mathcal{E}(R_1, R_2)$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(R_1, R_2) \equiv \{ & (E_1(R_1, R_2), E_2(R_1, R_2)) : \\ & E_1(R_1, R_2) \text{ と } E_2(R_1, R_2) \text{ が} \\ & \text{与えられた符号化方式で達成可能} \}. \end{aligned} \quad (9)$$

さらに、フィードバック通信路がない場合の達成可能領域と与えられた符号化レート対  $(R_1, R_2)$  に対して、 $(R_1^{(m)}, R_2^{(m)})$  を図 2 のように決め、 $\gamma^*$  を次のように定義する。

$$\gamma^* \equiv \frac{R_1}{R_1^{(m)}} = \frac{R_2}{R_2^{(m)}}. \quad (10)$$

このとき、次の定理が成り立つ。

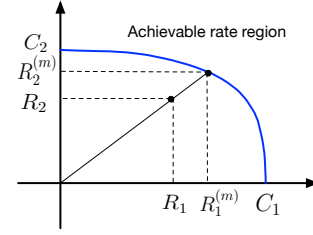


図 2: 与えられた  $(R_1, R_2)$  に対する  $(R_1^{(m)}, R_2^{(m)})$  の決め方

定理 2 文献 [①] で提案した 2 段階符号化法の  $\mathcal{E}(R_1, R_2)$  は次式で与えられる。

$$\mathcal{E}(R_1, R_2) = \text{Conv} \left( \bigcup_{\bar{x} \in \mathcal{X}, \check{x} \in \mathcal{X}} \mathcal{E}(R_1, R_2 | \bar{x}, \check{x}) \right) \quad (11)$$

ここで、“Conv” は集合の凸包を意味し、 $\mathcal{E}(R_1, R_2 | \bar{x}, \check{x})$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(R_1, R_2 | \bar{x}, \check{x}) \equiv \{ & (E_1, E_2) : \\ & 0 \leq E_1 \leq (1 - \gamma^*) D(p_1(\cdot | \bar{x}) \| p_1(\cdot | \check{x})) \\ & 0 \leq E_2 \leq (1 - \gamma^*) D(p_2(\cdot | \bar{x}) \| p_2(\cdot | \check{x})) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

なお、 $D(\cdot \| \cdot)$  は相対エントロピー (ダイバージェンス) である。

定理 2 は受信者数が 2 の場合であるが、受信者が一般に  $L$  人の場合に拡張することができる [①]。また、多重アクセス通信路に対しても同様の拡張をすることができる。

### (C) 事後マッチング方式のマルチユーザ通信路への拡張

単一ユーザに対して無雑音フィードバック通信路を利用できる場合、事後マッチング方式はガウス雑音通信路に対して大きな復号誤り指数を達成できる [4]。本研究では、事後マッチング方式を放送型通信路と干渉通信路に拡張した。ここでは、主に放送型通信路の場合について説明する。

図 3 の通信路を考える。放送型通信路の入力を  $X_n$  とし、受信者  $m$  に対する出力を  $Y_n^{(m)}$  とすると、次の関係が成り立つものとする。

$$Y_n^{(m)} = X_n + Z_n + Z_n^{(m)} \quad (13)$$

ここで、 $Z_n$  と  $Z_n^{(m)}$  はそれぞれ分散  $\sigma^2$  と  $\sigma_m^2$  を持つ互いに独立な加法的ガウス雑音とする。受信者  $m$  に送信する情報  $\Theta_m$  は、 $(0, 1)$  上で一様分布するものとし、 $N(0, 1)$  の標準正規分布の分布関数を  $F(\cdot)$  で表す。このとき、 $S_1^{(m)}$  を  $S_1^{(m)} = F^{-1}(\Theta_m)$  で定義する。まず、各受信者  $m$  に

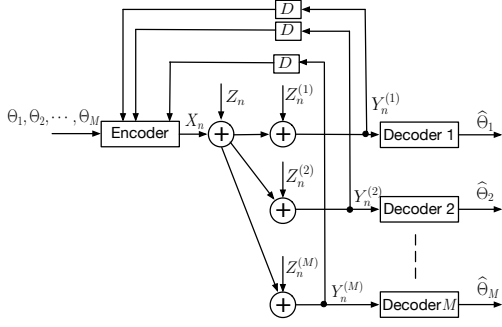


図 3:  $M$  受信者ガウス雑音放送型通信路

$S_1^{(m)}$  を送信し、受信者  $m$  は  $Y_1^{(m)} = S_1^{(m)} + Z_1 + Z_1^{(m)}$  を受信する.  $n \geq 2$  に対して、 $X_n$  を次のように定める.

$$S_n^{(m)} = \frac{1}{a_{n-1}^{(m)}} \left( S_{n-1}^{(m)} - b_{n-1}^{(m)} Y_{n-1}^{(m)} \right) \quad (14)$$

$$X_n = \beta_n \sum_{m=1}^M \alpha_n^{(m)} S_n^{(m)} \quad (15)$$

ここで、 $\beta$  と  $a_n^{(m)}$  は電力制限  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] \leq P$  を満たすように定める. このとき、次の定理が成り立つ.

**定理 3** 文献 [2] で提案した復号法を用いるとき、各  $R_m$  が  $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(m)} < 1$  に対して

$$R_m < R_m^* \equiv - \limsup_{n \rightarrow \infty} \log a_n^{(m)} \quad (16)$$

を満たし、 $W_n^{(m)} \equiv \mathbb{E}[S_n^{(m)}]^2$  の上界が有限であるとき、符号化レートベクトル  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$  は達成可能である. さらに、誤り確率  $p_{n,e}^{(m)}$  は次式を満たす.

$$-\log p_{n,e}^{(m)} = o\left(2^{2n(R_m^* - R_m)}\right) \quad (17)$$

干渉通信路に対しても、事後マッチング方式を拡張した符号化・復号化法を提案し、同様の定理が成り立つことを証明した [4].

#### (D) フィードバック通信路を伴う多重対象同定符号化

$N$  人の受信者 (対象) の集合  $\mathcal{N} \equiv \{1, 2, \dots, N\}$  とその中の部分集合  $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$  に対して、 $|\mathcal{K}| = K$  とする. このとき、雑音のある通信路を通して 2 値の同定情報  $\{T, F\}$  を、 $i \in \mathcal{K}$  であれば T を、 $i \notin \mathcal{K}$  であれば F を受信者に伝送する同定符号化を考える. なお、 $K = 1$  の場合は、文献 [5] で取り扱われた場合となる.

符号器  $\varphi$  と受信者  $i$  の復号器を  $\psi_i$  とする. このとき、同定符号化の符号化レート  $R_K$ 、第 1 種復号誤り指数  $E_1$

および第 2 種復号誤り指数  $E_2$  を次のように定義する.

$$R_K = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \log N \quad (18)$$

$$\lambda_1^{(n)}(i|\mathcal{K}) \equiv \Pr\{\psi_i(\varphi(\mathcal{K}, V)) = F\} \text{ for } i \in \mathcal{K} \quad (19)$$

$$\lambda_1^{(n)} \equiv \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{Z}} \max_{i \in \mathcal{K}} \lambda_1^{(n)}(i|\mathcal{K}) \quad (20)$$

$$E_1 \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \lambda_1^{(n)} \quad (21)$$

$$\lambda_2^{(n)}(i|\mathcal{K}) \equiv \Pr\{\psi_i(\varphi(\mathcal{K}, V)) = T\} \text{ for } i \notin \mathcal{K} \quad (22)$$

$$\lambda_2^{(n)} \equiv \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{Z}} \max_{i \notin \mathcal{K}} \lambda_2^{(n)}(i|\mathcal{K}) \quad (23)$$

$$E_2 \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \lambda_2^{(n)} \quad (24)$$

ここで、 $V$  は乱数であり、符号器は確率的符号器となる. なお、決定的符号器の場合は、 $V$  を固定する.

同定符号容量  $C_{\text{ID}}$  は、 $E_1 > 0$ 、 $E_2 > 0$  の条件の下で達成可能な  $R_K$  の上限として定義される. 各受信者から符号器に無雑音フィードバック通信路が利用できる場合で、決定的符号器を用いる場合の同定符号容量を  $C_{\text{ID}}^{\text{f,d}}$  とし、確率的符号器を用いる場合の同定符号容量を  $C_{\text{ID}}^{\text{f,s}}$  とする. また、通信路の遷移確率を  $W(y|x)$  で表す. このとき、次の定理が成り立つ [6].

#### 定理 4

$$C_{\text{ID}}^{\text{f,d}} \equiv \max_{x \in \mathcal{X}} H(W(\cdot|x)) \quad (25)$$

$$C_{\text{ID}}^{\text{f,s}} \equiv \max_{P \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} H(P \cdot W) \quad (26)$$

ここで、 $\mathcal{P}(\mathcal{X})$  は、通信路の入力確率分布の集合であり、 $P$  は入力確率分布である. また、 $P \cdot W$  は、通信路の入力分布が  $P$  のときの通信路の出力分布である.

#### まとめ

上記のように、2 節で説明した本研究の目的 (YI 方式を有雑音フィードバック通信路に拡張すること、YI 方式と事後マッチング方式をマルチユーザ通信路に拡張すること、無雑音フィードバック通信路が利用できる場合の多重同定符号化法の性能を評価すること) に関して、それぞれ大きな成果を得ることができた. なお、一部の研究成果に関しては、国際シンポジウムで発表しているものの、まだ学術雑誌で発表していない. そのような成果に関して学術論文誌への投稿の準備を進めるとともに、本研究で得られた成果をさらに拡張する研究を進める予定である.

#### <引用文献>

- [1] J. M. Ooi, "Coding for Channels with Feedback," Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] M. V. Burnashev, "Data Transmission over a Discrete Channel with Feedback: Random transmission time," Problems of Inf. Transm., vol. 4, no. 4, pp. 10–30, 1976.

- [3] H. Yamamoto and K. Itoh, "Asymptotic performance of a modified Schalkwijk-Barron scheme for channels with noiseless feedback," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-25, no. 6, pp. 729-733, Nov. 1979.
- [4] O. Shayevitz and M. Feder, "Optimal feedback communication via posterior matching," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 57, no. 3, pp. 1186-1221, March 2011.
- [5] R. Ahlswede and G. Dueck, "Identification in the presence of feedback—A discovery of new capacity formulas," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 35, no. 1, pp. 30-36, Jan. 1989.

## 5 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 7 件) 全て査読有

- ① H. Yamamoto and S. Hara, "Application of Yamamoto-Itoh Coding Scheme to Discrete Memoryless Broadcast Channels," Proc. of 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT2017), pp. 1878-1882, June 25-30, 2017, Aachen, Germany.  
(DOI: 10.1109/ISIT.2017.8006855)
- ② L. V. Truong and H. Yamamoto, "Posterior Matching for Gaussian Broadcast Channels with Feedback," IEICE Trans. on Fundamentals, vol. E100-A, no. 5, pp. 1165-1178, May 2017.  
(DOI: 10.1587/transfun.E100.A.1165)
- ③ H. Yamamoto and M. Ueda, "Multiple object Identification coding," IEEE Trans. on Information Theory, vol. 61 no. 8, pp. 4269-4276, Aug. 2015.  
(DOI: 10.1109/TIT.2015.2441058)
- ④ L. V. Truong and H. Yamamoto, "On the Capacity of Symmetric Gaussian Interference Channels with Feedback", Proc. of 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT2015), pp. 201-205, June 14-19, 2015, Hong Kong.  
(DOI: 10.1109/ISIT.2015.7282445)
- ⑤ M. V. Burnashev and H. Yamamoto, "On using noisy feedback in a Gaussian channel," Problems of Information Transmission, vol. 50, no. 3, pp. 217-231, July 2014  
(DOI: 10.1134/S0032946014030028)
- ⑥ H. Yamamoto and M. Ueda, "Identification Codes to Identify Multiple Objects," Proc. of 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT2014), pp. 1241-1245, June 29- July 4, 2014, Honolulu, Hawaii, USA.  
(DOI: 10.1109/ISIT.2014.6875031)

- ⑦ M. Burnashev and H. Yamamoto, "Noisy Feedback Improves the Gaussian Channel Reliability Function," Proc. of 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT2014), pp. 2554-2558, June 29- July 4, 2014, Honolulu, Hawaii, USA.  
(DOI: 10.1109/ISIT.2014.6875295)

[学会発表] (計 2 件)

- ⑧ 山本博資, 原慎太郎, "Yamamoto-Itoh 方式の放送型通信路への拡張," 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2016) 予稿集, 6.1.3, pp. 312-317, 2016 年 12 月 13 日~16 日 (岐阜県・高山市)
- ⑨ 上田真士, 山本博資, "同時に 2 人以上の受信者を識別するための効率のよい同定符号化法," 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2013) 予稿集, 2.2.3, pp. 98-103, 2013 年 11 月 16 日~29 日 (静岡県・伊東市)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

## 6 研究組織

(1) 研究代表者

山本 博資 (YAMAMOTO, Hirosuke)  
 東京大学・大学院新領域創成科学研究科・教授  
 研究者番号: 3 0 1 3 6 2 1 2

(4) 研究協力者

[海外共同研究者]

BURNASHEV, Marat V.  
 ロシア科学アカデミー情報伝送問題研究所・教授  
 TRUONG, Lan V.  
 国立シンガポール大学・博士課程大学院生

[研究当時, 大学院生]

上田真士 (UEDA, Shinji)  
 原慎太郎 (HARA, Shintaro)